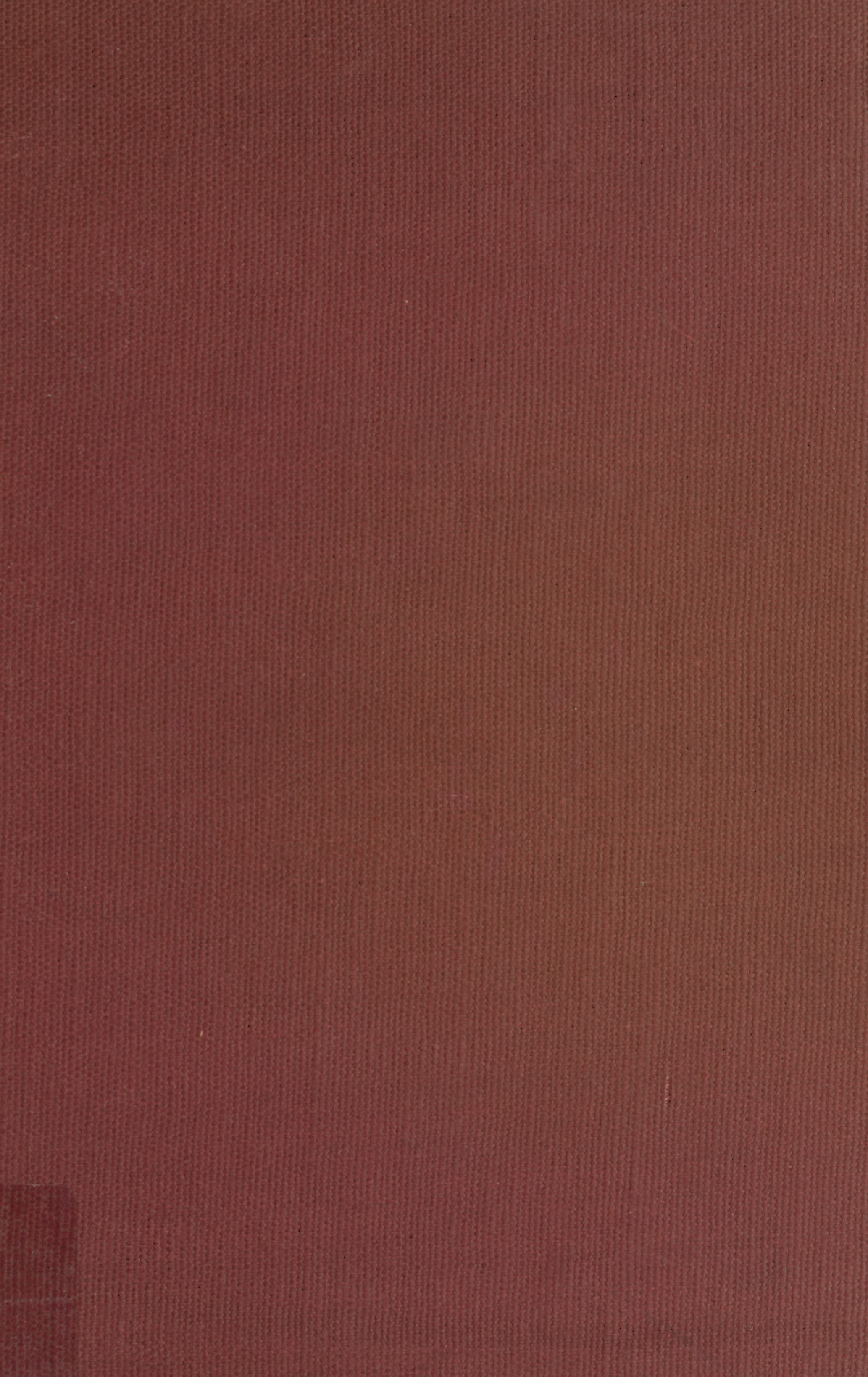
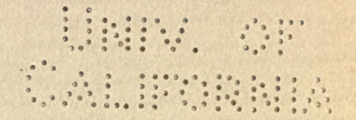
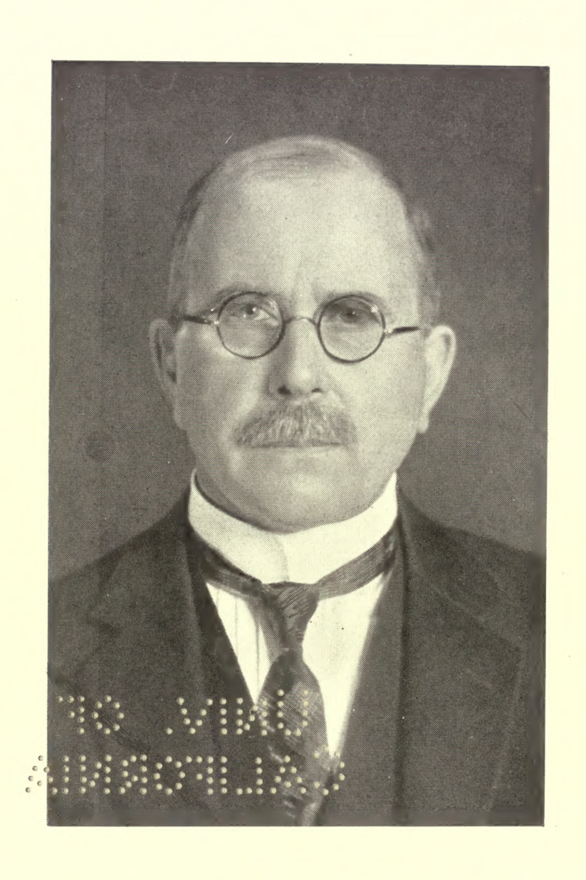


COMMENTATIONES

IN HONOREM



ERNESTI LEONARDI LINDELÖF



Ernst Lindelöf.

COMMENTATIONES

IN HONOREM

ERNESTI LEONARDI LINDELÖF

DIE VII MENSIS MARTII A. MCMXXX

SEXAGENARII



A DISCIPULIS EDITAE

Ernst Leonard Lindelöf

zum 60. Geburtstage.

An dem Tage, da unser hochverehrter Lehrer Ernst Lindelöf sein sechzigstes Lebensjahr vollendet, möge es uns, denen es vergönnt gewesen ist, seine Tätigkeit zu verfolgen, und die wir ihm vor anderen zu Danke verpflichtet sind, gestattet sein, dieser Veröffentlichung einige Worte über seine Wirksamkeit als Forscher und Lehrer voranzuschicken.

In seiner wissenschaftlichen Produktion hat Lindelöf vorzugsweise die verschiedenen Gebiete der Analysis behandelt. Er hat ausgezeichnete Untersuchungen über die Theorie der Differentialgleichungen herausgegeben. Er hat die harmonische Analysis behandelt und Fragen aus dem Gebiet der Mengenlehre klargelegt. Vor allem ist Lindelöf jedoch als Funktionentheoretiker bekannt. Diesen wichtigen Zweig der Analysis hat er in einer Reihe glänzender Schriften bearbeitet, welche die Entwicklung der Wissenschaft auf diesem Gebiete dauernd beeinflusst haben. Von den funktionentheoretischen Arbeiten Lindelöfs seien erwähnt seine im Ideenkreise Cauchys sich bewegenden Untersuchungen und ferner seine wichtigen Veröffentlichungen über die Theorie der ganzen Funktionen. Am bedeutendsten aber hat Lindelöf die Funktionentheorie durch diejenigen seiner Arbeiten gefördert, in denen er die zentralen Prinzipien der Funktionentheorie, insbesondere das sogenannte Prinzip des Maximalmoduls behandelt und auf wichtige Fragen anwendet. Durch diese Untersuchungen hat Lindelöf auf mehreren wichtigen Gebieten eine festere Einheitlichkeit geschaf-

fen, das Wesentliche der Theorien klar hervorgehoben und sie zugleich mit bemerkenswerten neuen Ergebnissen bereichert. LINDELÖFS wissenschaftliche Produktion trägt durchgängig das Gepräge gewissenhafter Gründlichkeit, gepaart mit einer ausgezeichneten Fähigkeit, selbst schwierige Materien in vorbildlich klarer und schöner Form darzustellen.

An LINDELÖFS Forschertätigkeit schliesst sich organisch seine lange, unermüdliche Lehrtätigkeit als Vertreter der mathematischen Wissenschaften an der Universität Helsingfors. Im Zusammenhang mit seinen Vorlesungen, die im Lauf der Jahre fast alle verschiedenen Gebiete der Mathematik behandelt haben, hat er mit nie versiegendem Interesse und kritischem Scharfsinn von Grund auf auch die klassischen Theorien der Mathematik in neue Form gegossen. Als Ergebnisse dieser unablässigen Gedankenarbeit hat er eine Anzahl meisterhafter Lehrbücher herausgegeben; insbesondere sei LINDELÖFS umfassende, von herkömmlichen Schablonen befreite Darstellung der Infinitesimalanalysis erwähnt, die erst zum Teil im Druck erschienen ist.

Durch seine Persönlichkeit und durch die unvergleichliche Art, wie er, einerseits unermüdlich anregend und ermutigend, anderseits mit sicherem Blick streng kritisierend und anleitend, sich zu seinen Schülern verhält, hat LINDELÖF diese mit festen Banden der Verehrung und Freundschaft an sich gefesselt. Ein anspruchsloser Beweis tiefer Dankbarkeit will auch die vorliegende Publikation sein, die die Schüler LINDELÖFS ihrem Lehrer widmen.

A

Ernst Leonard Lindelöf

pour son soixantième anniversaire.

Les élèves de M. Ernst Lindelöf, qui ont eu le bonheur de suivre de près son activité et qui lui doivent une reconnaissance particulière, tiennent à mettre en tête de ce recueil, publié à l'occasion du soixantième anniversaire du maître, une esquisse rapide de son œuvre de savant et de professeur.

La production scientifique de M. Lindelöf se rapporte surtout aux différents domaines de l'Analyse. Il a publié d'excellentes recherches sur la théorie des équations différentielles. Il s'est occupé de l'analyse harmonique et il a résolu un problème important de la théorie des ensembles. Il est cependant connu avant tout par ses beaux travaux sur la théorie des fonctions, qui ont exercé une influence persistante sur le développement de cette importante branche de l'Analyse. Parmi ces travaux il faut relever les mémoires qui se rattachent aux idées de Cauchy, ainsi que ceux qui sont relatifs à la théorie des fonctions entières. Mais la théorie des fonctions a sans doute progressé de la manière la plus sensible à la suite des travaux où il s'occupe des diverses applications des principes fondamentaux de cette théorie, notamment du principe du module maximum. Par ces recherches, il a apporté plus d'unité dans maint domaine important et il a réussi à exposer les théories, compliquées en apparence, dans une forme claire, faisant ressortir nettement ce qui y est essentiel, les enrichissant en même temps de résultats nouveaux. La production de

M. Lindelöf est, dans son ensemble, empreinte d'une rare solidité unie à une clarté et une élégance exceptionnelles.

A l'œuvre scientifique de M. Lindelöf se rattache organiquement son activité infatigable comme professeur de mathématiques à l'Université de Helsingfors. Dans ses cours, où il s'est occupé, pendant une longue suite d'années de professorat, de presque toutes les parties des mathématiques, il a, avec un zèle inlassable et une critique minutieuse, donné même aux théories classiques des sciences mathématiques une forme originale. Comme résultat de cette activité pédagogique, il a publié une série de leçons magistrales; il y a lieu de signaler particulièrement celles sur l'Analyse infinitésimale, ouvrage en cours de publication où il s'est dégagé complètement des formes routinières.

M. Lindelöf s'est acquis le respect et l'amitié de ses élèves par sa forte personnalité et la manière incomparable dont il a su se comporter envers eux, tantôt en leur prodiguant ses encouragements, tantôt en les critiquant et en les guidant avec un instinct sûr. C'est comme un faible hommage de leur profonde gratitude que les élèves de M. Lindelöf lui offrent ce recueil.

ZUR KORRELATIONSTHEORIE

Von

J. W. LINDEBERG

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A-G. SANA

Zur Korrelationstheorie.

1. Die in der Korrelationstheorie bisher am öftesten angewandten Charakteristiken sind die sog. Korrelations- und Regressionskoeffizienten. Die ersteren werden voraussichtlich die zentrale Stellung, die sie heute in der Theorie einnehmen, allmählich verlieren, die letzteren dagegen dürften mit der Zeit an Gewicht zunehmen, denn sie entsprechen einem unabweisbaren Bedürfnis und scheinen nicht durch bessere Masszahlen ersetzt werden zu können.

Das Folgende enthält hauptsächlich einen Beitrag zur Theorie der partiellen Regressionskoeffizienten. Es werden teils einige Resultate abgeleitet, die geeignet sind, die Natur dieser Koeffizienten zu beleuchten, teils wird eine Methode entwickelt, Formeln zur Berechnung des Mittelfehlers eines partiellen Regressionskoeffizienten zu gewinnen. Zuletzt wird dieselbe Methode auch auf die Frage von dem Mittelfehler eines Korrelationskoeffizienten angewandt.

2. Es sei

$$x_1,\ x_2, \cdots, x_{m+1} \tag{1}$$

ein System von $m+1$ zufälligen Variablen oder, wie wir auch sagen werden, eine $(m+1)$-dimensionale zufällige Variable. Hinsichtlich derselben machen wir die folgenden, in der ganzen Untersuchung geltenden Voraussetzungen.

Zur Variablen (1) gehört eine stetige Wahrscheinlichkeitsfunktion, d. h. eine Funktion $f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ mit folgenden Eigenschaften:

Sie ist nirgends negativ;

Es ist

$$\int\int \cdots \int f(x_1,\ x_2 \cdots x_{m+1})\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_{m+1} = 1,$$

wo, wie überall im Folgenden, wo wir Integrale hinschreiben, jedes Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen ist;

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable (1) in ein gewisses Gebiet des $(m+1)$-dimensionalen $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$-Raumes fällt, ist gleich dem über dieses Gebiet erstreckten Integral von $f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_{m+1}$.

Jede von ν Einzelvariablen aus (1) zusammengesetzte ν-dimensionale zufällige Variable $x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \cdots, x_{\mu_\nu}$ besitzt auch eine stetige Wahrscheinlichkeitsfunktion. Wir bezeichnen dieselbe mit $f_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\nu}(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \cdots, x_{\mu_\nu})$ und bemerken, dass man, um diese Funktion zu erhalten, nur die Funktion $f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ in bezug auf die Variablen, deren Indizes nicht in der Reihe $\mu_1, \mu_2 \cdots, \mu_\nu$ vorkommen, von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren hat.

Die wahrscheinlichen Werte der sämtlichen Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ sind Null.

Die bisherigen Annahmen haben nur den Zweck, die Darstellung zu vereinfachen. Wir machen aber noch die sachlich notwendige Voraussetzung, dass die wahrscheinlichen Werte der Quadrate x_μ^2 und der Produkte $x_\mu x_\nu$ bestimmte endliche Werte haben. Die ersteren mögen mit σ_μ^2, die letzteren mit $p_{\mu\nu}$ bezeichnet werden; σ_μ bedeutet also den Mittelfehler von x_μ.

Wenn gefragt wird, wie die Koeffizienten $a_1, a_2, \cdots, a_m$ gewählt werden sollen, damit der wahrscheinliche Wert der Grösse

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m - x_{m+1})^2$$

ein Minimum sei, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\sigma_1^2 a_1 + p_{12} a_2 + \cdots + p_{1m} a_m = p_{1\,m+1}, \\
(2)\qquad &p_{21} a_1 + \sigma_2^2 a_2 + \cdots + p_{2m} a_m = p_{2\,m+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_{m1} a_1 + p_{m2} a_2 + \cdots + \sigma_m^2 a_m = p_{m\,m+1}.
\end{aligned}$$

Setzen wir

(3) $$A_m = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{vmatrix}$$

und

(4) $$B_m = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & p_{12} & \cdots & p_{1\,m-1} & p_{1\,m+1} \\ p_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & p_{2\,m-1} & p_{2\,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{m\,m-1} & p_{m\,m+1} \end{vmatrix},$$

so erhalten wir also

(5) $$a_m = \frac{B_m}{A_m}.$$

Die Grösse a_m wird, wenn $m > 1$, partieller Regressionskoeffizient von x_{m+1} in bezug auf x_m mit Rücksicht auf die Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ genannt.

Wenn die Koeffizienten a_μ den Gleichungen (2) genügen, heisst die Ebene

$$x_{m+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m$$

des $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$-Raumes Regressionsebene von x_{m+1} in bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Wenn $m = 1$ und die Variable (1) also zweidimensional ist, reduzieren sich die Gleichungen (2) auf

$$\sigma_1^2 a_1 = p_{12}.$$

Der Quotient $\frac{p_{12}}{\sigma_1^2}$ heisst totaler Regressionskoeffizient von x_2 in bezug auf x_1. Allgemein ist $\frac{p_{\mu\nu}}{\sigma_\mu^2}$ der totale Regressionskoeffizient von x_ν in bezug auf x_μ.

Mit Benutzung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{\mu\nu}(x_\mu, x_\nu)$ der zweidimensionalen zufälligen Variablen x_μ, x_ν hat man

$$\sigma_\mu^2 = \int\int x_\mu^2 f_{\mu\nu}(x_\mu, x_\nu)\, dx_\mu\, dx_\nu$$

und

$$\frac{p_{\mu\nu}}{\sigma_\mu^2} = \int\int \frac{x_\nu}{x_\mu} \frac{x_\mu^2 f_{\mu\nu}(x_\mu, x_\nu)}{\sigma_\mu^2} dx_\mu\, dx_\nu,$$

und wir können deshalb sagen, dass der totale Regressionskoeffizient von x_ν in bezug auf x_μ den mit $\frac{x_\mu^2}{\sigma_\mu^2}$ gewogenen wahrscheinlichen Wert des Quotienten $\frac{x_\nu}{x_\mu}$ bedeutet.

Betreffs des partiellen Regressionskoeffizienten soll zunächst gezeigt werden, dass ein solcher immer auch als totaler Regressionskoeffizient aufgefasst werden kann.

3. Indem wir mit $x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{m+1\,1}$; $x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{m+1\,2}$; $\cdots$; $x_{1\,m}, x_{2\,m} \cdots, x_{m+1\,m}$ m unabhängig voneinander ausgefallene Wertsysteme der Variablen (1) bezeichnen, setzen wir

(6)
$$a_m = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\,m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2\,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m\,1} & x_{m\,2} & \cdots & x_{m\,m} \end{vmatrix}$$

und

(7)
$$b_m = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m-1\,1} & x_{m-1\,2} & \cdots & x_{m-1\,m} \\ x_{m+1\,1} & x_{m+1\,2} & \cdots & x_{m+1\,m} \end{vmatrix}$$

und wollen zeigen, dass *der partielle Regressionskoeffizient a_m gleich dem totalen Regressionskoeffizienten von b_m in bezug auf a_m ist.*

Entwickeln wir die Determinante a_m z. B. nach den Elementen der ersten Kolonne, so erscheint jedes solche Element mit einem Faktor multipliziert, der eine von dem Elemente selbst unabhängige zufällige Variable ist. Da nach unseren Voraussetzungen der wahrscheinliche Wert jedes Elementes Null ist, so ist also auch der wahrscheinliche Wert jedes einzelnen Gliedes der Entwicklung Null, und hieraus folgt, dass der wahrscheinliche Wert der Summe gleich Null ist.

Im Folgenden werden wir vermittels Voranschreiben des Buchstaben M einen wahrscheinlichen Wert bezeichnen. Unser obiges Resultat wird dann $M a_m = O$ geschrieben.

Natürlich ist auch $M b_m = O$.

Wir wollen jetzt $M a_m^2$ berechnen. Durch Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinante ergibt sich für a_m^2, wenn wir die Bezeichnung

$$X_{\mu\nu} = x_{\mu 1} x_{\nu 1} + x_{\mu 2} x_{\nu 2} + \cdots + x_{\mu m} x_{\nu m}$$

einführen, die Form

$$a_m^2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mm} \end{vmatrix}.$$

Wir entwickeln diese Determinante in Teildeterminanten m:ten Grades, wo die Elemente aus Produkte $x_{\mu i} x_{\nu i}$ bestehen, und wo alle Elemente einer Kolonne denselben zweiten Index i haben. Es erscheint dann zunächst eine Summe von m^m Teildeterminanten; man sieht aber sofort, dass jede solche Determinante, wo die Elemente zweier Kolonnen denselben zweiten Index aufweisen, gleich Null ist. Diese Kolonnen werden nämlich nach Absonderung je eines Faktors identisch. Wir erhalten deshalb

$$a_m^2 = \sum \begin{vmatrix} x_{1\mu_1}^2 & x_{1\mu_2} x_{2\mu_2} & \cdots & x_{1\mu_m} x_{m\mu_m} \\ x_{2\mu_1} x_{1\mu_1} & x_{2\mu_2}^2 & \cdots & x_{2\mu_m} x_{m\mu_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m\mu_1} x_{1\mu_1} & x_{m\mu_2} x_{2\mu_2} & \cdots & x_{m\mu_m}^2 \end{vmatrix},$$

wo die Summe über alle möglichen Wertsysteme $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ auszustrecken ist, die eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, m$ ausmachen. Die Summe enthält also $m!$ Glieder.

Um den wahrscheinlichen Wert der Summe zu erhalten, wollen wir den wahrscheinlichen Wert eines Gliedes

$$G = \begin{vmatrix} x_{1\mu_1}^2 & x_{1\mu_2} x_{2\mu_2} & \cdots & x_{1\mu_m} x_{m\mu_m} \\ x_{2\mu_1} x_{1\mu_1} & x_{2\mu_2}^2 & \cdots & x_{2\mu_m} x_{m\mu_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m\mu_1} x_{1\mu_1} & x_{m\mu_2} x_{2\mu_2} & \cdots & x_{m\mu_m}^2 \end{vmatrix}$$

berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Variablen $x_{1\mu}, x_{2\mu}, \cdots, x_{m\mu}$ zwischen die respektiven Grenzen

$$\begin{array}{c} x_{1\mu} \cdots\cdots x_{1\mu} + dx_{1\mu}, \\ x_{2\mu} \cdots\cdots x_{2\mu} + dx_{2\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m\mu} \cdots\cdots x_{m\mu} + dx_{m\mu} \end{array}$$

fallen, ist, mit der in Art. 2 eingeführten Bezeichnung,

$$f_{12\cdots m}(x_{1\mu}, x_{2\mu}, \cdots, x_{m\mu})\, dx_{1\mu}\, dx_{2\mu} \cdots dx_{m\mu}.$$

Beachten wir, dass die Wertsysteme $x_{1\mu}, x_{2\mu}, \cdots, x_{m\mu}$, die verschiedenen Werten von μ entsprechen, untereinander unabhängige m-dimensionale zufällige Variable sind, und schreiben wir zur Abkürzung

$$f_{12\cdots m}(x_{1\mu}, x_{2\mu}, \cdots, x_{m\mu}) = f_{m\mu},$$

so ist also der wahrscheinliche Wert von G gleich dem m^2-fachen Integral

$$\int\int \cdots \int G\, f_{m\mu_1} f_{m\mu_2} \cdots f_{m\mu_m}\, dx_{1\mu_1}\, dx_{2\mu_1} \cdots dx_{m-1\,\mu_m}\, dx_{m\mu_m}.$$

Wir denken uns nun die Integration so ausgeführt, dass zunächst in bezug auf die Variablen $x_{1\mu_1}, x_{2\mu_1}, \cdots, x_{m\mu_1}$ integriert wird. Dann sind die Faktoren $f_{m\mu_2}, f_{m\mu_3}, \cdots, f_{m\mu_m}$ als Konstanten und G als lineare Funktion mit konstanten Koeffizienten der Elemente der ersten Kolonne zu betrachten. Die Integration bewirkt deshalb nur, dass das Produkt $f_{m\mu_1} G$ sich in die Determinante G_1 verwandelt, die dadurch entsteht, dass die Elemente der ersten Kolonne in G durch ihre wahrscheinlichen Werte ersetzt werden. Es bleibt sodann noch zu integrieren

$$\int\int \cdots \int G_1\, f_{m\mu_2} \cdots f_{m\mu_m}\, dx_{1\mu_2}\, dx_{2\mu_3} \cdots dx_{m\mu_m}.$$

Integrieren wir jetzt in bezug auf $x_{1\mu_2}, x_{2\mu_2}, \cdots, x_{m\mu_2}$, so geht das Produkt $f_{m\mu_2} G_1$ in die Determinante über, die aus G_1 hervorgeht, wenn die Elemente der zweiten Kolonne durch ihre wahrscheinlichen Werte ersetzt werden. Geht man in dieser Weise weiter, so ergibt sich nach m Schritten

$$M\,G = A_m,$$

wo A_m die Bedeutung (3) hat, und da dieses Resultat ganz unabhängig von dem Wertsystem $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ gilt, erhalten wir also schliesslich

$$M\,a_m^2 = m!\,A_m. \tag{8}$$

Der wahrscheinliche Wert des Produktes $a_m b_m$ ergibt sich in analoger Weise. Man findet

$$a_m b_m = \sum \begin{vmatrix} x_{1\mu_1}^2 & x_{1\mu_2} x_{2\mu_2} \cdots x_{1\mu_{m-1}} x_{m-1\,\mu_{m-1}} & x_{1\mu_m} x_{m+1\,\mu_m} \\ x_{2\mu_1} x_{1\mu_1} & x_{2\mu_2}^2 \quad \cdots x_{2\mu_{m-1}} x_{m-1\,\mu_{m-1}} & x_{2\mu_m} x_{m+1\,\mu_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m\mu_1} x_{1\mu_1} & x_{m\mu_2} x_{2\mu_2} \cdots x_{m\mu_{m-1}} x_{m-1\,\mu_{m-1}} & x_{m\mu_m} x_{m+1\,\mu_m} \end{vmatrix}$$

wo die Summe über alle Wertsysteme $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$, die Permutationen der Zahlen $1, 2, \cdots, m$ sind, zu erstrecken ist, und hieraus folgt

$$M\,(a_m b_m) = m!\,B_m,$$

wo B_m die Grösse (4) ist. Also ist mit Hinsicht auf (5)

$$\alpha_m = \frac{M\,(a_m b_m)}{M\,a_m^2},$$

womit die im Anfang dieses Artikels gemachte Behauptung bewiesen ist.

4. Um weitere Resultate zu erhalten, werden wir uns einer speziellen Darstellungsform der Variablen (1) bedienen.

Indem wir mit $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m+1}$ ein System von Parametern bezeichnen, betrachten wir das Integral

$$\int\int\cdots\int L^2 f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_{m+1},$$

wo

$$L = x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \cdots + x_{m+1} \beta_{m+1}.$$

Dasselbe kann, weil wir die Funktion $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ stetig voraussetzen, nur dann Null sein, wenn $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{m+1} = 0$. Die quadratische Form

$$\sigma_1^2 \beta_1^2 + \sigma_2^2 \beta_2^2 + \cdots + \sigma_{m+1}^2 \beta_{m+1}^2 + 2\, p_{12} \beta_1 \beta_2 + \cdots + 2\, p_{m\, m+1} \beta_m \beta_{m+1},$$

die durch Ausführung der Integration entsteht, ist deshalb positiv definit und kann in eine Summe von Quadraten von der Form

$$(k_{11} \beta_1 + k_{21} \beta_2 + \cdots + k_{m+1\,1} \beta_{m+1})^2 + (k_{22} \beta_2 + k_{32} \beta_3 + \cdots \\ \cdots + k_{m+1\,2} \beta_{m+1})^2 + \cdots + (k_{m+1\, m+1} \beta_{m+1})^2$$

zerlegt werden, wo keiner von den Koeffizienten $k_{11}, k_{22}, \cdots, k_{m+1\, m+1}$ Null ist. Wir denken uns die Zerlegung so ausgeführt, dass die genannten Koeffizienten positiv sind, was offenbar möglich ist, und bemerken, dass zwischen den erhaltenen Koeffizienten $k_{\mu\nu}$ und den Koeffizienten der quadratischen Form die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_1^2 &= k_{11}^2, \\ p_{12} &= k_{11} k_{21}, \\ \sigma_2^2 &= k_{21}^2 + k_{22}^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{\mu\nu} &= k_{\mu 1} k_{\nu 1} + k_{\mu 2} k_{\nu 2} + \cdots + k_{\mu\mu} k_{\nu\mu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{m+1}^2 &= k_{m+1\,1}^2 + k_{m+1\,2}^2 + \cdots + k_{m+1\, m+1}^2 \end{aligned}$$

bestehen.

Mit Hilfe der Koeffizienten $k_{\mu\nu}$ definieren wir eine neue $(m+1)$-dimensionale zufällige Variable $u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}$, indem wir setzen

$$(10) \quad \begin{aligned} x_1 &= k_{11} u_1, \\ x_2 &= k_{21} u_1 + k_{22} u_2, \\ x_3 &= k_{31} u_1 + k_{32} u_2 + k_{33} u_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= k_{m\,1} u_1 + k_{m\,2} u_2 + \cdots + k_{m\,m} u_m, \\ x_{m+1} &= k_{m+1\,1} u_1\, k_{m+1\,2} u_2 + \cdots + k_{m+1\, m} u_m + k_{m+1\, m+1} u_{m+1}. \end{aligned}$$

Aus dem Umstande, dass keiner von den Koeffizienten $k_{\mu\mu}$ Null ist, folgt, dass diese Gleichungen wirklich die neuen Variablen eindeutig definieren, und aus der Annahme, dass die wahrscheinlichen Werte der Variablen x_μ Null sind, folgt unmittelbar, dass auch die wahrscheinlichen Werte der Variablen u_μ Null sind.

Durch Quadrierung und paarweise Multiplikation der Gleichungen (10) und Bildung der wahrscheinlichen Werte der entstandenen Ausdrücke erhält man, wenn

$$M(u_\mu u_\nu) = \gamma_{\mu\nu}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= k_{11}^2 \gamma_{11}, \\
p_{12} &= k_{11} k_{21} \gamma_{11} + k_{11} k_{22} \gamma_{12}, \\
\sigma_2^2 &= k_{21}^2 \gamma_{11} + 2 k_{21} k_{22} \gamma_{12} + k_{22}^2 \gamma_{22}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^{\nu} k_{\mu 1} k_{\nu i} \gamma_{1i} + \sum_{i=1}^{\nu} k_{\mu 2} k_{\nu i} \gamma_{2i} + \cdots + \sum_{i=1}^{\nu} k_{\mu\mu} k_{\nu i} \gamma_{\mu i}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_{m+1}^2 &= \sum_{\lambda \varrho} k_{m+1\,\lambda} k_{m+1\,\varrho} \gamma_{\lambda\varrho}.
\end{aligned}$$

Aus der Form dieser Gleichungen geht hervor, dass sie die Grössen $\gamma_{\mu\nu}$ eindeutig bestimmen, und die Gleichungen (9) zeigen, dass

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} = \gamma_{22} = \quad \cdots = \gamma_{m+1\,m+1} &= 1, \\
\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = \cdots = \gamma_{m\,m+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Wir gelangen also zu dem Resultat, dass *jede den Voraussetzungen des Art. 2 genügende $(m+1)$-dimensionale zufällige Variable in der Form* (10) *dargestellt werden kann, wo $u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}$ zufällige Variable bedeuten, die den Bedingungen*

$$(11) \qquad \begin{aligned} M u_\mu = 0, \qquad M u_\mu^2 = 1 \qquad & \textit{für jedes } \mu, \\ M(u_\mu u_\nu) = 0, \qquad & \textit{wenn } \mu \neq \nu, \end{aligned}$$

genügen.

Wenn das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ normal ist, findet man leicht, dass die Variablen u_μ von-

einander unabhängige, dem Gauss'schen Gesetze folgende zufällige Variablen sind. Man erhält nämlich die Wahrscheinlichkeitsfunktion der $(m+1)$-dimensionalen zufälligen Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}$ durch Einführung in $f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ für $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ der rechten Seiten von (10) und Multiplikation des Resultates mit der aus den Koeffizienten dieser Ausdrücke gebildeten Determinante $(m+1)$:sten Grades. Ist nun $f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ eine normale Wahrscheinlichkeitsfunktion, so wird auch die neue Wahrscheinlichkeitsfunktion normal. Jede Einzelvariable u_μ folgt also dem Gauss'schen Gesetze und jede zweidimensionale Variable u_μ, u_ν dem Bravais'schen Gesetze. Aus diesem letzten Umstande folgt schliesslich, da $M(u_\mu u_\nu) = 0$, dass u_μ und u_ν unabhängig voneinander sind. Also, *jede dem normalen Wahrscheinlichkeitsgesetze folgende Variable* $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ *lässt sich, wenn* $Mx_1 = Mx_2 = \cdots = Mx_{m+1} = 0$, *in der Form (10) darstellen, wo* $u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}$ *voneinander unabhängige, dem Gauss'schen Gesetze folgende zufällige Variablen mit dem wahrscheinlichen Wert Null und dem Mittelfehler Eins bedeuten.*

5. Es sei nun $u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}$ eine $(m+1)$-dimensionale zufällige Variable mit den Eigenschaften (11), und $u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{m+1\,1}$; $u_{12}, u_{22}, \cdots, u_{m+1\,2}$; $\cdots$ sei eine Reihe von unabhängig voneinander ausgefallenen Wertsystemen dieser Variablen. Setzen wir

$$D_m = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} \end{vmatrix},$$

so ist nach (8)

$$(12) \qquad M D_m^2 = m! \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = m!$$

Wir setzen ferner

$$D'_m = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m-1\,1} & u_{m-1\,2} & \cdots & u_{m-1\,m} \\ u_{m+1\,1} & u_{m+1\,2} & \cdots & u_{m+1\,m} \end{vmatrix}$$

und betrachten das Produkt $D_m D'_m$. Wir denken uns die beiden Determinanten vollständig entwickelt und die Multiplikation gliedweise ausgeführt. Jedes einzelne Glied des Endresultates enthält ein Element aus der letzten Zeile von D_m, u_{mi}, und ein Element aus D'_m mit demselben zweiten Index i, u_{ri}, wo $r \neq m$, aber keine weiteren Faktoren mit dem zweiten Index i. Das Produkt $u_{mi} u_{ri}$ ist also eine von dem Produkte der übrigen Faktoren unabhängige zufällige Variable, und da $M(u_{mi} u_{ri}) = M(u_m u_r) = 0$, ist der wahrscheinliche Wert des ganzen Gliedes Null. Dann ist der wahrscheinliche Wert der Summe Null, und es wird

$$M(D_m D'_m) = 0. \tag{13}$$

Wir setzen jetzt noch

$$D''_m = \begin{vmatrix} u_{1\,m+1} & u_{1\,m+2} & \cdots & u_{1\,2m-1} & u_{1\,m} \\ u_{2\,m+1} & u_{2\,m+2} & \cdots & u_{2\,2m-1} & u_{2\,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m\,m+1} & u_{m\,m+2} & \cdots & u_{m\,2m-1} & u_{m\,m} \end{vmatrix}$$

und

$$D'''_m = \begin{vmatrix} u_{1\,m+1} & u_{1\,m+2} & \cdots & u_{1\,2m-1} & u_{1\,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m-1\,m+1} & u_{m-1\,m+2} & \cdots & u_{m-1\,2m-1} & u_{m-1\,m} \\ u_{m+1\,m+1} & u_{m+1\,m+2} & \cdots & u_{m+1\,2m-1} & u_{m+1\,m} \end{vmatrix},$$

so dass also D''_m die letzte Kolonne mit D_m und D'''_m dieselbe Kolonne mit D'_m gemeinsam hat. Wir suchen den wahrscheinlichen Wert des Produktes

$$D_m D'_m D''_m D'''_m. \tag{14}$$

Zu diesem Zweck entwickeln wir jede Determinante nach den Elementen der letzten Kolonne

$$\begin{aligned} D_m &= d_1 u_{1m} + d_2 u_{2m} + \cdots + d_m u_{mm}, \\ D'_m &= d'_1 u_{1m} + \cdots + d'_{m-1} u_{m-1\,m} + d'_{m+1} u_{m+1\,m}, \\ D''_m &= d''_1 u_{1m} + d''_2 u_{2m} + \cdots + d''_m u_{mm}, \\ D'''_m &= d'''_1 u_{1m} + \cdots + d'''_{m-1} u_{m-1\,m} + d'''_{m+1} u_{m+1\,m} \end{aligned}$$

und betrachten die verschiedenen Teilprodukte

$$d_\mu\, d'_\nu\, d''_\lambda\, d'''_\varrho\, u_{\mu m}\, u_{\nu m}\, u_{\lambda m}\, u_{\varrho m}, \tag{15}$$

die bei der Multiplikation entstehen. Wenn d_μ und d'_ν nicht identisch sind, findet man wie oben, dass

$$M\,(d_\mu\, d'_\nu) = 0\,,$$

und da das Produkt $d_\mu\, d'_\nu$ eine von dem Produkte der übrigen Faktoren in (15) unabhängige zufällige Variable ist, so folgt hieraus, dass der wahrscheinliche Wert von (15) Null ist. Ebenso ist dieser wahrscheinliche Wert Null, wenn nicht d''_λ und d'''_ϱ identisch sind. Das einzige Glied (15), wo sowohl d_μ und d'_ν als d''_λ und d'''_ϱ identisch sind, ist dasjenige, wo $\mu = m$, $\nu = m+1$, $\lambda = m$, $\varrho = m+1$. Also ist der wahrscheinliche Wert von (14) gleich dem wahrscheinlichen Wert des Produktes

$$d_m^2\, d_m''^2\, u_{mm}^2\, u_{m+1\,m}^2.$$

Nach (12) ist aber $M\,d_m^2 = M\,d_m''^2 = (m-1)!$, und wir erhalten deshalb schliesslich, da d_m^2, $d_m''^2$ und das Produkt $u_{mm}^2\, u_{m+1\,m}^2$ voneinander unabhängig sind,

$$M\,(D_m\, D'_m\, D''_m\, D'''_m) = [(m-1)!]^2\, M\,(u_m^2\, u_{m+1}^2). \tag{16}$$

Da u_m und u_{m+1} nicht voneinander unabhängig zu sein brauchen, können wir aber nicht den Schluss ziehen, dass $M\,(u_m^2\, u_{m+1}^2) = M\,u_m^2 \cdot M\,u_{m+1}^2 = 1$; im Gegenteil müssen wir uns denken, dass $M\,(u_m^2\, u_{m+1}^2)$ im allgemeinen einen von 1 verschiedenen Wert hat.

6. Wir nehmen jetzt an, dass eine $(m+1)$-dimensionale zufällige Variable in der Form (10) gegeben vorliegt, wo die Variab-

len u_μ die Eigenschaften (11) haben, und wollen die grundlegenden Grössen (3), (4) und (5) vermittels der Konstanten $k_{\mu\nu}$ ausdrücken.

Indem wir die einem Wertsystem $x_{1\mu}, x_{2\mu}, \cdots, x_{m+1\mu}$ entsprechenden Werte der Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}$ mit $u_{1\mu}, u_{2\mu}, \cdots, u_{m+1\mu}$ bezeichnen, erhalten wir, wenn wir die vermittels dieser ausgedrückten x-Werte in die Determinante (6) einführen,

$$(17)\qquad a_m = \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & 0 \cdots 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots k_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= k_{11} k_{22} \cdots k_{mm} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} \end{vmatrix}.$$

Wegen (12) ergibt sich also, wenn wir die Bezeichnung

$$k_{11} k_{22} \cdots k_{\mu\mu} = K_\mu$$

einführen,

$$M a_m^2 = K_m^2 \, m!,$$

was uns mit Rücksicht auf (8) zeigt, dass

$$(18)\qquad A_m = K_m^2.$$

Für die Determinante (7) erhält man, wenn sie vermittels der $u_{\mu\nu}$-Grössen ausgedrückt wird,

$$(19)\qquad b_m = K_{m-1} k_{m+1\,m} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} \end{vmatrix} +$$

$$+ K_{m-1} k_{m+1\,m+1} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m-1\,1} & u_{m-1\,2} & \cdots & u_{m-1\,m} \\ u_{m+1\,1} & u_{m+1\,2} & \cdots & u_{m+1\,m} \end{vmatrix}.$$

Hieraus und aus (17) folgt mit Rücksicht auf (12) und (13)

$$M(a_m b_m) = m!\, K_{m-1}^2\, k_{mm}\, k_{m+1\,m}.$$

Da andererseits nach Art. 3 $M(a_m b_m) = m!\, B_m$, so wird

(20) $$B_m = K_{m-1}^2\, k_{mm}\, k_{m+1\,m}.$$

Aus (5), (18) und (20) folgt schliesslich

(21) $$a_m = \frac{k_{m+1\,m}}{k_{mm}}.$$

7. Es sei nun

$$x_\mu - a_{\mu 1}^{(\nu)} x_1 - a_{\mu 2}^{(\nu)} x_2 - \cdots - a_{\mu\nu}^{(\nu)} x_\nu = 0 \qquad (\mu > \nu)$$

die Gleichung der Regressionsebene im $(\nu + 1)$-dimensionalen $x_1, x_2, \cdots, x_\nu, x_\mu$-Raume von x_μ in bezug auf $x_1, x_2, \cdots x_\nu$. Ferner setzen wir

$$y_{\mu\nu} = x_\mu - a_{\mu 1}^{(\nu)} x_1 - a_{\mu 2}^{(\nu)} x_2 - \cdots - a_{\mu\nu}^{(\nu)} x_\nu$$

und denken uns die rechte Seite mit Benutzung von (10) vermittels der u-Grössen ausgedrückt. Es ergeben sich dann der Reihe nach als Koeffizienten von $u_1, u_2, \cdots, u_\mu$ die Zahlen

$$\begin{array}{l}
k_{\mu 1} - a_{\mu 1}^{(\nu)} k_{11} - a_{\mu 2}^{(\nu)} k_{21} - \cdots - a_{\mu\nu}^{(\nu)} k_{\nu 1} \\
k_{\mu 2} - a_{\mu 2}^{(\nu)} k_{22} - a_{\mu 3}^{(\nu)} k_{32} - \cdots - a_{\mu\nu}^{(\nu)} k_{\nu 2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_{\mu\,\nu-1} - a_{\mu\,\nu-1}^{(\nu)} k_{\nu-1\,\nu-1} - a_{\mu\nu}^{(\nu)} k_{\nu\,\nu-1} \\
k_{\mu\nu} - a_{\mu\nu}^{(\nu)} k_{\nu\nu} \\
k_{\mu\,\nu+1} \\
\vdots \\
k_{\mu\mu}.
\end{array} \tag{22}$$

Da $a_{\mu 1}^{(\nu)}, a_{\mu 2}^{(\nu)}, \cdots, a_{\mu\nu}^{(\nu)}$ die Werte der Koeffizienten $c_1, c_2, \cdots, c_\nu$ sind, die die Grösse

$$M(x_\mu - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_\nu x_\nu)^2$$

zu einem Minimum machen, haben die ν ersten der Zahlen (22) den Wert Null, d. h. die Koeffizienten $a_{\mu 1}^{(\nu)}, a_{\mu 2}^{(\nu)}, \cdots, a_{\mu \nu}^{(\nu)}$ genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} k_{11} a_{\mu 1}^{(\nu)} + k_{21} a_{\mu 2}^{(\nu)} + \cdots + k_{\nu 1} a_{\mu \nu}^{(\nu)} &= k_{\mu 1}, \\ k_{22} a_{\mu 2}^{(\nu)} + \cdots + k_{\nu 2} a_{\mu \nu}^{(\nu)} &= k_{\mu 2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{\nu \nu} a_{\mu \nu}^{(\nu)} &= k_{\mu \nu}, \end{aligned}$$

und es ist

(23) $$y_{\mu \nu} = k_{\mu\, \nu+1} u_{\nu+1} + k_{\mu\, \nu+2} u_{\nu+2} + \cdots + k_{\mu \mu} u_{\mu}.$$

Insbesondere können wir schreiben

(24) $$\begin{aligned} y_{\nu+1\, \nu} &= k_{\nu+1\, \nu+1} u_{\nu+1}, \\ y_{\nu+2\, \nu} &= k_{\nu+2\, \nu+1} u_{\nu+1} + k_{\nu+2\, \nu+2} u_{\nu+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m+1\, \nu} &= k_{m+1\, \nu+1} u_{\nu+1} + k_{m+1\, \nu+2} u_{\nu+2} + \cdots \\ &\quad \cdots + k_{m+1\, m} u_m + k_{m+1\, m+1} u_{m+} \end{aligned}$$

und erhalten so eine Darstellung der $(m - \nu + 1)$-dimensionalen zufälligen Variablen $y_{\nu+1\, \nu}, y_{\nu+2\, \nu}, \cdots, y_{m+1\, \nu}$ von der Form (10). Hier nehmen die Koeffizienten $k_{m m}$ und $k_{m+1\, m}$ dieselbe Stellung ein wie in (10), und wir können deshalb aus (21) den Schluss ziehen, dass *der partielle Regressionskoeffizient von x_{m+1} in bezug auf x_m mit Rücksicht auf $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ gleich ist dem partiellen Regressionskoeffizienten von $y_{m+1\, \nu}$ in bezug auf $y_{m \nu}$ mit Rücksicht auf $y_{\nu+1\, \nu}, y_{\nu+2\, \nu}, \cdots, y_{m-1\, \nu}$.*

Wir betrachten noch die Folge von mehrdimensionalen zufälligen Variablen

(25) $$\begin{array}{c} x_1, x_2, x_3, \cdots x_{m+1} \\ y_{21}, y_{31}, \cdots y_{m+1\, 1} \\ y_{32}, \cdots y_{m+1\, 2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{m-1\, m-2}, y_{m\, m-2}, y_{m+1\, m-2} \\ y_{m\, m-1}, y_{m+1\, m-1} \end{array}$$

und bemerken, dass nach dem Obigen der Koeffizient a_m gleich dem totalen Regressionskoeffizienten von $y_{m+1\,m-1}$ in bezug auf $y_{m\,m-1}$ ist. Wegen (24) ergeben sich die Darstellungen von der Form (10) der sukzessiven Variablen (25), indem aus den rechten Seiten der Gleichungen, die die vorhergehende Variable darstellen, das erste Glied weggelassen wird. Da $y_{\mu 1} = x_\mu - a_{\mu 1}^{(1)} x_1$, wo $a_{\mu 1}^{(1)}$ den totalen Regressionskoeffizienten von x_μ in bezug auf x_1 bezeichnet, so ist also allgemein

$$y_{\mu\nu} = y_{\mu\,\nu-1} - \beta_{\mu\nu}\, y_{\nu\,\nu-1},$$

wo $\beta_{\mu\nu}$ den totalen Regressionskoeffizienten von $y_{\mu\,\nu-1}$ in bezug auf $y_{\nu\,\nu-1}$ bedeutet. Die sich hieraus ergebende Konstruktion von a_m vermittels totaler Regressionskoeffizienten ist, in Verbindung mit der in Art. 2 gegebenen Deutung eines solchen, einigermassen geeignet, den Begriff eines partiellen Regressionskoeffizienten zu beleuchten. Man kann sich die Sache so vorstellen, dass die Reduktion der ersten $(m+1)$-dimensionalen Variablen von (25) auf die folgende m-dimensionale eine Elimination des Einflusses von x_1 bedeutet, so dass die Verbundenheit der Variablen $y_{21}, y_{31}, \cdots, y_{m+1\,1}$ die Verbundenheit der Grössen $x_2, x_3, \cdots, x_{m+1}$ in tunlichster Weise von den durch x_1 verursachten Störungen befreit darstellt. Bei dem Übergang zu der folgenden $(m-1)$-dimensionalen Variablen (25) wird der Einfluss von x_2 eliminiert, usw. In der zuletzt zurückstehenden zweidimensionalen Variablen $y_{m\,m-1}$, $y_{m+1\,m-1}$ kommt die Verbundenheit zwischen x_m und x_{m+1} in der bestmöglichen Weise von dem Einflusse der übrigen Variablen befreit zum Vorschein, und a_m ist das Mass des hier noch auftretenden Einflusses von x_m auf x_{m+1}.

8. Wir gehen jetzt zur Berechnung des Mittelfehlers eines Regressionskoeffizienten über. Es seien $\bar{A}_m$ und $\bar{B}_m$ Näherungswerte von A_m und B_m, und es werde gesetzt

$$\bar{a}_m = \frac{\bar{B}_m}{\bar{A}_m}.$$

Wir nehmen nicht den Begriff des Mittelfehlers im strengen Sinne, sondern wir betrachten, wie üblich, als Quadrat des Mittelfehlers den wahrscheinlichen Wert vom Quadrate des Ausdruckes, der dem ersten Differential von $\frac{B_m}{A_m}$ entspricht, d. h. des Ausdruckes

$$\frac{A_m(\bar{B}_m - B_m) - B_m(\bar{A}_m - A_m)}{A_m^2} = \frac{A_m \bar{B}_m - B_m \bar{A}_m}{A_m^2}.$$

Indem wir durch Voranschreiben des Buchstaben ε einen Mittelfehler bezeichnen, legen wir also unserer Untersuchung die Gleichung

$$(26) \qquad \varepsilon^2(\bar{\alpha}_m) = \frac{M(A_m \bar{B}_m - B_m \bar{A}_m)^2}{A_m^4}$$

zugrunde.

Wir denken uns die Näherungswerte $\bar{A}_m$ und $\bar{B}_m$ in folgender Weise erhalten. Es seien $x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{m+1\,1}; x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{m+1\,2}; \cdots; x_{1n}, x_{2n} \cdots x_{m+1\,n}$ $(n > m+1)$ unabhängig voneinander ausgefallene Wertsysteme von $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$, und es werde gesetzt

$$\bar{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{n}(x_{\mu 1}^2 + x_{\mu 2}^2 + \cdots + x_{\mu n}^2),$$

$$\bar{p}_{\mu\nu} = \frac{1}{n}(x_{\mu 1} x_{\nu 1} + x_{\mu 2} x_{\nu 2} + \cdots + x_{\mu n} x_{\nu n}).$$

$\bar{A}_m$ und $\bar{B}_m$ mögen die Werte sein, die die Determinanten (3) und (4) erhalten, wenn darin die Grössen $\bar{\sigma}_\mu$ und $\bar{p}_{\mu\nu}$ anstatt σ_μ und $p_{\mu\nu}$ eingeführt werden.

Wir wollen zunächst die Grössen $\bar{A}_m$ und $\bar{B}_m$ in eine für unsere Zwecke geeignete Form bringen. Setzen wir

$$A'_m = n^m \bar{A}_m$$

und

$$Y_{\mu\nu} = x_{\mu 1} x_{\nu 1} + x_{\mu 2} x_{\nu 2} + \cdots + x_{\mu n} x_{\nu n},$$

so wird

$$A'_m = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{m1} & Y_{m2} & \cdots & Y_{mm} \end{vmatrix}.$$

In Analogie mit dem Vorgange des Art. 3 entwickeln wir diese Determinante in Teildeterminanten m:ten Grades und erhalten dabei zunächst eine Summe von n^m solchen. In dieser Summe ist wieder jede Determinante, wo in zwei Kolonnen derselbe zweite Index auftritt, gleich Null, und A'_m reduziert sich also auf die Summe der $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ übrig bleibenden Determinanten. Diese können in Gruppen so zusammengefasst werden, dass zu Einer Gruppe die Determinanten gehören, wo als zweiter Index gewisse bestimmte Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ auftreten. Zu jeder Gruppe gehören also $m!$ Determinanten, wo die zweiten Indizes alle möglichen Permutationen der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ ausmachen. Die Summe der zu einer Gruppe gehörigen Determinanten kann nun, wie aus der Untersuchung des Art. 3 geschlossen werden kann, geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} x_{1\mu_1} & x_{1\mu_2} & \cdots & x_{1\mu_m} \\ x_{2\mu_1} & x_{2\mu_2} & \cdots & x_{2\mu_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m\mu_1} & x_{m\mu_2} & \cdots & x_{m\mu_m} \end{vmatrix}^2,$$

und mithin wird

$$A'_m = \sum_{\mu_1 < \mu_2 \cdots < \mu_m} \begin{vmatrix} x_{1\mu_1} & x_{1\mu_2} & \cdots & x_{1\mu_m} \\ x_{2\mu_1} & x_{2\mu_2} & \cdots & x_{2\mu_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m\mu_1} & x_{m\mu_2} & \cdots & x_{m\mu_m} \end{vmatrix}^2,$$

wo die Summe über alle Wertsysteme $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ zu erstrecken ist, die m der Grösse nach geordnete Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \cdots, n$ sind. Die Gliederanzahl rechts ist also

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

Setzen wir

$$B'_m = n^m B_m,$$

so erhalten wir in analoger Weise

$$B'_m = \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m} \begin{vmatrix} x_{1\mu_1} & x_{1\mu_2} & \cdots & x_{1\mu_m} \\ x_{2\mu_1} & x_{2\mu_2} & \cdots & x_{2\mu_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m\mu_1} & x_{m\mu_2} & \cdots & x_{m\mu_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{1\mu_1} & x_{1\mu_2} & \cdots & x_{1\mu_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m-1\,\mu_1} & x_{m-1\,\mu_2} & \cdots & x_{m-1\,\mu_m} \\ x_{m+1\,\mu_1} & x_{m+1\,\mu_2} & \cdots & x_{m+1\,\mu_m} \end{vmatrix}.$$

9. Indem wir uns die Variable $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ in der Form (10) dargestellt denken, bezeichnen wir wie vorher mit $u_{1\mu}, u_{2\mu}, \cdots, u_{m+1\,\mu}$ die den x-Werten $x_{1\mu}, x_{2\mu}, \cdots x_{m+1\,\mu}$ entsprechenden u-Werte. Es ergibt sich dann mit Benutzung von (17)

$$(27) \qquad A'_m = K_m^2 \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m} \begin{vmatrix} u_{1\mu_1} & u_{1\mu_2} & \cdots & u_{1\mu_m} \\ u_{2\mu_1} & u_{2\mu_2} & \cdots & u_{2\mu_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m\mu_1} & u_{m\mu_2} & \cdots & u_{m\mu_m} \end{vmatrix}^2$$

und mit Rücksicht auf (19)

$$(28) \qquad B'_m = K_{m-1}^2 \, k_{m\,m} \, k_{m+1\,m} \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m} \begin{vmatrix} u_{1\mu_1} & u_{1\mu_2} & \cdots & u_{1\mu_m} \\ u_{2\mu_1} & u_{2\mu_2} & \cdots & u_{2\mu_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m\mu_1} & u_{m\mu_2} & \cdots & u_{m\mu_m} \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ K_{m-1}^2 \, k_{m\,m} \, k_{m+1\,m+1} \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_m} \begin{vmatrix} u_{1\mu_1} & u_{1\mu_2} & \cdots & u_{1\mu_m} \\ u_{2\mu_1} & u_{2\mu_2} & \cdots & u_{2\mu_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m\mu_1} & u_{m\mu_2} & \cdots & u_{m\mu_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{1\mu_1} & u_{1\mu_2} & \cdots & u_{1\mu_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m-1\,\mu_1} & u_{m-1\,\mu_2} & \cdots & u_{m-1\,\mu_m} \\ u_{m+1\,\mu_1} & u_{m+1\,\mu_2} & \cdots & u_{m+1\,\mu_m} \end{vmatrix}$$

Aus (18), (20), (27) und (28) folgt, wenn wir das im zweiten Gliede von (28) auftretende Determinantenprodukt zur Abkürzung mit $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$ bezeichnen,

$$(29) \qquad A_m B'_m - B_m A'_m = K_{m-1}^4 \, k_{m\,m}^3 \, k_{m+1\,m+1} \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m} H(\mu_1, \mu_2 \cdots, \mu_m).$$

Die Berechnung des wahrscheinlichen Wertes der Grösse $(A_m B'_m - B_m A'_m)^2$ führt also auf die Berechnung der wahrscheinlichen Werte der verschiedenen Produkte

$$(30) \qquad H(\mu_1, \mu_2 \cdots, \mu_m) \; H(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m).$$

Falls keine von den Zahlen μ einem ν gleich ist, so ist der wahrscheinliche Wert des Produktes gleich Null, denn die beiden Faktoren sind dann voneinander unabhängige zufällige Variablen, deren wahrscheinliche Werte für sich nach (13) Null sind. Bezeichnen wir mit l_i den wahrscheinlichen Wert des Produktes (30), wenn in den μ- und ν-Reihen i Zahlen gemeinsam sind, und mit N_i die Anzahl solcher Produkte im Quadrate von (29), so ist also

$$(31)\quad M\,(A_m\,B'_m - B_m\,A'_m)^2 = K^8_{m-1}\;k^6_{mm}\;k^2_{m+1\,m+1}\sum_{i=1}^{m} N_i\,l_i.$$

Man findet nun leicht

$$N_i = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-2\,m+1+i)}{[\,(m-i)!\,]^2\;i!},$$

und hieraus folgt erstens wegen (16)

$$N_1\,l_1 = m\,(n-1)\cdots(n-2\,m+2)\,M\,(u^2_m\,u^2_{m+1}).$$

Weiter sieht man, dass jedes N_i, wenn $i > 1$, eine im Vergleich mit N_1 für ein grosses n verschwindende Grösse ist. Da jedes l_i endlich und von n unabhängig ist, folgt hieraus, dass die Summe $\sum\limits_{i=2}^{m} N_i\,l_i$ für ein grosses n im Vergleich mit dem Gliede $N_1\,l_1$ verschwindet. Indem wir uns mit einem Resultat begnügen, dessen relativer Fehler mit unendlich wachsendem n verschwindet, können wir also in (31) die Summe $\Sigma\,N_i\,l_i$ durch

$$n\,(n-1)\cdots(n-2\,m+2)\,M\,(u^2_m\,u^2_{m+1})$$

ersetzen. Benutzen wir (18), erhalten wir also aus (31)

$$M\,\frac{(A_m\,\bar{B}_m - B_m\,\bar{A}_m)^2}{A^4_m} = \frac{k^2_{m+1\,m+1}}{k^2_{mm}}\cdot\frac{n\,(n-1)\cdots(n-2\,m+2)}{n^{2\,m}}\,M\,(u^2_m\,u^2_{m+1}).$$

Ersetzen wir noch den zweiten Faktor durch $\frac{1}{n}$, so ergibt sich das Resultat

$$(32)\qquad \varepsilon^2(a_m) = \frac{1}{n}\,\frac{k^2_{m+1\,m+1}}{k^2_{m\,m}}\,M\,(u^2_m\,u^2_{m+1}),$$

oder anders geschrieben

$$(33)\qquad \varepsilon^2(\bar{a}_m) = \frac{1}{n}\frac{A_{m-1}A_{m+1}}{A_m^2} M(u_m^2 u_{m+1}^2).$$

Bedienen wir uns der in Art. 7 definierten Grössen $y_{\mu\nu}$, so können wir schreiben

$$u_m = \frac{y_{m\,m-1}}{k_{m\,m}} \quad \text{und} \quad u_{m+1} = \frac{y_{m+1\,m}}{k_{m+1\,m+1}}$$

und erhalten so aus (32) die Formel

$$(34)\qquad \varepsilon^2(\bar{a}_m) = \frac{1}{n}\frac{M(y^2_{m\,m-1}\,y^2_{m+1\,m})}{k^4_{m\,m}},$$

die für numerische Anwendungen gut geeignet sein dürfte.

10. Wenn $M(u_m^2 u_{m+1}^2) = 1$, so reduziert sich die Formel (32) auf

$$\varepsilon(\bar{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{k_{m+1\,m+1}}{k_{m\,m}}$$

und die Formel (33) auf

$$(35)\qquad \varepsilon^2(\bar{a}_m) = \frac{1}{n}\frac{A_{m-1}A_{m+1}}{A_m^2}.$$

Das ist z. B. der Fall, wenn die Variablen u_m und u_{m+1} unabhängig voneinander sind, weil dann $M(u_m^2 u_{m+1}^2) = Mu_m^2 \cdot Mu_{m+1}^2$. Es verdient hierbei bemerkt zu werden, dass die Unabhängigkeit von u_m und u_{m+1} gar keine Einschränkung hinsichtlich der $(m-1)$-dimensionalen Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ bedeutet, und dass der Fall, wo die Variable $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ dem normalen Wahrscheinlichkeitsgesetz folgt, als ganz spezieller Fall hierunter tritt.

Die Formel (35) kann noch anders geschrieben werden. Wenn gesetzt wird

$$(36)\qquad A_m^* = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & p_{12} & \cdots & p_{1\,m-1} & p_{1\,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m-1\,1} & p_{m-1\,2} & \cdots & \sigma^2_{m-1} & p_{m-1\,m+1} \\ p_{m+1\,1} & p_{m+1\,2} & \cdots & p_{m+1\,m-1} & \sigma^2_{m+1} \end{vmatrix},$$

so besteht die der Gleichung (8) analoge Gleichung

$$M\,b_m^2 = m!\,A_m^*.$$

Aus (19) folgt andererseits mit Rücksicht auf (12) und (13)

$$M\,b_m^2 = K_{m-1}^2\,(k_{m+1\,m}^2 + k_{m+1\,m+1}^2)\,m!,$$

und hiernach ist

$$A_m^* = K_{m-1}^2\,(k_{m+1\,m}^2 + k_{m+1\,m+1}^2).$$

Mit Beachtung von (18) und (20) ergibt sich deshalb

$$A_{m+1}\,A_{m-1} = A_m\,A_m^* - B_m^2,$$

und wenn dieser Ausdruck in den Zähler von (35) eingeführt wird, erhält man die Formel

$$\varepsilon^2\,(\overline{a}_m) = \frac{1}{n}\,\frac{A_m\,A_m^* - B_m^2}{A_m^2},$$

die sich besser als (35) für numerische Rechnung eignet, weil A_m^* einfacher auszurechnen ist als A_{m+1}.

Setzen wir

$$\frac{B_m}{A_m^*} = a_m',$$

so ergibt sich noch

$$\varepsilon^2\,(\overline{a}_m) = \frac{1}{n}\,\frac{a_m}{a_m'}\,(1 - a_m\,a_m').$$

Das ist die für die Berechnung des Mittelfehlers gewöhnlich gebrauchte Formel.

11. Wir wollen noch den Mittelfehler des Korrelationskoeffizienten R der Variablen x_m und x_{m+1} mit Rücksicht auf $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ berechnen. Es ist

$$R = \frac{B_m}{\sqrt{A_m\,A_m^*}},$$

und das erste Differential $d\,R$ ist

$$d\,R = \frac{2\,A_m\,A^*_m\,d B_m - A^*_m\,B_m\,d\,A_m - B_m\,A_m\,d\,A^*_m}{2\,A_m\,A^*_m \sqrt{A_m\,A^*_m}}.$$

In Analogie mit der im vorigen gebrauchten Bezeichnung sei A^*_m die Determinante, die aus (36) entsteht, wenn die σ- und p-Grössen darin durch die $\bar{\sigma}$- und p-Grössen des Art. 8 ersetzt werden, $\bar{R}$ bezeichne den Ausdruck

$$\frac{\bar{B}_m}{\sqrt{\bar{A}_m\,\bar{A}^*_m}},$$

und $A^{*\prime}_m$ sei gleich A^* multipliziert mit n^m. Wir führen in den obigen Differentialausdruck $\bar{A}_m - A_m$, $\bar{B}_m - B_m$ und $A^*_m - A^*_m$ anstatt dA_m, dB_m und dA^*_m ein und betrachten den wahrscheinlichen Wert des Quadrates des so entstandenen Ausdruckes als Quadrat des Mittelfehlers von R. Wir gehen m. a. W. von der Gleichung

$$(37)\qquad \varepsilon^2(R) = \frac{M\,[2\,A_m\,A^*_m\,B_m - A^*_m\,B_m\,A_m - A_m\,B_m\,A^*_m]^2}{4\,A^3_m\,A^{*\,3}_m}$$

aus.

Um den wahrscheinlichen Wert im Zähler zu berechnen, haben wir Folgendes zu bemerken.

Denken wir uns in den Entwicklungen des Art. 5 die Rollen der Variablen x_m und x_{m+1} vertauscht, so ergeben sich anstatt (10) die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 &= k_{11}\,u_1,\\
x_2 &= k_{21}\,u_1 + k_{22}\,u_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{m-1} &= k_{m-1\,1}\,u_1 + \cdots + k_{m-1\,m-1}\,u_{m-1},\\
x_{m+1} &= k_{m+1\,1}\,u_1 + \cdots + k_{m+1\,m-1}\,u_{m-1} + k^*_{m\,m}\,u^*_{m\,m},\\
x_m &= k_{m1}\,u_1 + \cdots + k_{m\,m-1}\,u_{m-1} + k^*_{m+1\,m}\,u^*_m + k^*_{m+1\,m+1}\,u^*_{m+1}.
\end{aligned}$$

wo wir in Analogie mit der in Art. 4 gemachten Annahme die Koeffizienten $k^*_{m\,m}$ und $k^*_{m+1\,m+1}$ positiv annehmen. Nur im letzten Gliede der m-ten Gleichung und in den zwei letzten Gliedern der $(m+1)$:ten Gleichung treten neue Koeffizienten und Variablen

auf. Zwischen diesen neuen Grössen und den alten besteht offenbar der folgende Zusammenhang:

$$(38)\qquad \begin{aligned} k_{m\,m}\, u_m &= k^*_{m+1\,m}\, u^*_m + k^*_{m+1\,m+1}\, u^*_{m+1} \\ k^*_{m\,m}\, u^*_m &= k_{m+1\,m}\, u_m + k_{m+1\,m+1}\, u_{m+1}. \end{aligned}$$

Vermittels Quadrierung und Bildung der wahrscheinlichen Werte der erhaltenen Ausdrücke folgt hieraus

$$(39)\qquad \begin{aligned} k^2_{m\,m} &= k^{*\,2}_{m+1\,m} + k^{*\,2}_{m+1\,m+1} \\ k^{*\,2}_{m\,m} &= k^2_{m+1\,m} + k^2_{m+1\,m+1}, \end{aligned}$$

und wenn wir die Gleichungen (38), nach Vertauschung der beiden Seiten der zweiten Gleichung, multiplizieren, ergibt sich in analoger Weise

$$(40)\qquad k_{m\,m}\, k_{m+1\,m} = k^*_{m\,m}\, k^*_{m+1\,m}.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung (39) mit $k^{*\,2}_{m\,m}$ und die zweite mit $k^2_{m\,m}$, so folgt weiter mit Rücksicht auf diese letzte Gleichung

$$(41)\qquad k_{m\,m}\, k_{m+1\,m+1} = k^*_{m\,m}\, k^*_{m+1\,m+1}.$$

Aus (18), (20) und (40) und aus der der Gleichung (18) analogen für A^*_m bestehenden Gleichung folgt

$$(42)\qquad R = \frac{k_{m+1\,m}}{k^*_{m\,m}} = \frac{k^*_{m+1\,m}}{k_{m\,m}},$$

und also ist mit Rücksicht auf (39) und (41)

$$(43)\qquad 1 - R^2 = \frac{k^2_{m+1\,m+1}}{k^{*\,2}_{m\,m}} = \frac{k^{*\,2}_{m+1\,m+1}}{k^2_{m\,m}}.$$

Jetzt können wir den wahrscheinlichen Wert im Zähler von (37) berechnen. Indem wir uns die Grösse $A^{*\prime}_m$ in der dem Ausdruck (27) analogen Form dargestellt denken, führen wir in (37) anstatt $\overline{B}_m$, $\overline{A}_m$ und $\overline{A}^*_m$ ihre Ausdrücke in den u-Grössen ein und erhalten dann, wenn wir beachten, dass in (28) die Konstanten k deren beide Indizes m oder $m+1$ sind und die u-Grössen deren

erster Index m oder $m+1$ ist, durch die entsprechenden mit einem Stern behafteten Grössen ersetzt werden können,

$$\varepsilon^2(R) = \frac{1}{4n^{2m}} M \left[\frac{k_{m+1\,m+1}}{k^*_{m\,m}} \Sigma H(\mu_1, \mu_2 \cdots, \mu_m) + \frac{k^*_{m+1\,m+1}}{k_{m\,m}} \Sigma H^*(\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_m) \right]^2,$$

wo H^* das dem Produkt H analoge Determinantenprodukt bedeutet, in dem anstelle der Grössen $u_{m\mu}$ und $u_{m+1\,\mu}$ die Grössen $u^*_{m\mu}$ und $u^*_{m+1\,\mu}$ auftreten. Aus den Ergebnissen des Art. 9 folgt unmittelbar, dass wir, wenn wir uns mit einem für ein grosses n geltenden Resultat begnügen, schreiben können

$$\frac{1}{n^{2m}} M\left(\Sigma H(\mu_1, \mu_2 \cdots, \mu_m)\right)^2 = \frac{1}{n} M(u_m^2\, u_{m+1}^2)$$

und

$$\frac{1}{n^{2m}} M\left(\Sigma H^*(\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_m)\right)^2 = \frac{1}{n} M(u_m^{*2}\, u_{m+1}^{*2}).$$

Der wahrscheinliche Wert des Produktes

$$\Sigma H(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m) \cdot \Sigma H^*(\mu_1, \mu_2 \cdots, \mu_m)$$

kann in genau derselben Weise ermittelt werden wie diejenigen der obigen Quadrate; der einzige Unterschied ist, dass anstelle der Produkte $u_m^2\, u_{m+1}^2$ und $u_m^{*2}\, u_{m+1}^{*2}$ das Produkt $u_m\, u_m^*\, u_{m+1}\, u_{m+1}^*$ auftritt. Berücksichtigen wir (43), so erhalten wir also das Resultat

$$\text{(44)} \qquad \varepsilon^2(R) = \frac{1-R^2}{4n} M\left[u_m\, u_{m+1} + u^*_m\, u^*_{m+1}\right]^2.$$

Unter gewissen Voraussetzungen reduziert sich diese Gleichung auf die bekannte Formel

$$\varepsilon(R) = \frac{1-R^2}{\sqrt{n}}.$$

Das ist z. B. der Fall, wenn die Variable $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ dem normalen Wahrscheinlichkeitsgesetz folgt. Dann sind sowohl u_m und u_{m+1} als u^*_m und u^*_{m+1} untereinander unabhängig, und es ist also erstens

$$
(45) \qquad \begin{aligned} M(u_m^2 u_{m+1}^2) &= M(u_m^{*2} u_{m+1}^{*2}) = 1 \\ M(u_m u_{m+1}^3) &= M(u_m^3 u_{m+1}) = 0. \end{aligned}
$$

Aus (38) folgt weiter wegen (40), (41), (42) und (43)

$$
\begin{aligned} u_m^* &= R\, u_m + \sqrt{1 - R^2}\, u_{m+1} \\ u_{m+1}^* &= \sqrt{1 - R^2}\, u_m - R\, u_{m+1}. \end{aligned}
$$

Die sich hieraus ergebende Gleichung

$$
u_m u_{m+1} u_m^* u_{m+1}^* = (1 - 2 R^2) u_m^2 u_{m+1}^2 + R \sqrt{1 - R^2} (u_m^3 u_{m+1} - u_m u_{m+1}^3)
$$

und die Gleichungen (45) geben

$$
M[u_m u_{m+1} + u_m^* u_{m+1}^*]^2 = 4(1 - R^2),
$$

womit die Richtigkeit unserer Behauptung dargelegt ist.

Wir wollen noch die Formel (44) in einer der Gleichung (34) analogen Form schreiben. Es ist

$$
\begin{aligned} k_{mm} u_m &= y_{m\, m-1} \\ k_{mm}^* u_m^* &= y_{m+1\, m-1}, \end{aligned}
$$

und wegen (38)

$$
k_{m+1\, m+1} u_{m+1} = \frac{1}{k_{mm}} (k_{mm} y_{m+1\, m-1} - k_{m+1\, m} y_{m\, m-1})
$$

$$
k_{m+1\, m+1}^* u_{m+1}^* = \frac{1}{k_{mm}^*} (k_{mm}^* y_{m\, m-1} - k_{m+1\, m}^* y_{m+1\, m-1}).
$$

Hieraus folgt

$$
u_m u_{m+1} + u_m^* u_{m+1}^* = \frac{k_{mm} y_{m\, m-1} y_{m+1\, m-1} - k_{m+1\, m} y_{m\, m-1}^2}{k_{mm}^2 k_{m+1\, m+1}} +
$$

$$
+ \frac{k_{mm}^* y_{m+1\, m-1} y_{m\, m-1} - k_{m+1\, m}^* y_{m+1\, m-1}^2}{k_{mm}^{*2} k_{m+1\, m+1}^*},
$$

was wegen (41) geschrieben werden kann

$$\frac{1}{k_{m\,m}\,k_{m+1\,m+1}}\left[2\,y_{m\,m-1}\,y_{m+1\,m-1}-\frac{k_{m+1\,m}}{k_{m\,m}}\,y^2_{m\,m-1}-\frac{k^*_{m+1\,m}}{k^*_{m\,m}}\,y^2_{m+1\,m-1}\right].$$

Führen wir diesen Ausdruck in (44) ein und benutzen die Gleichungen (41) und (42), so ergibt sich

$$\varepsilon^2(\bar{R})=\frac{M\left[2\,y_{m\,m-1}\,y_{m+1\,m-1}-R\,y^2_{m\,m-1}-R\,y^2_{m+1\,m-1}\right]^2}{4\,n\,k^2_{m\,m}\,k^{*\,2}_{m\,m}}\,.$$

ÜBER DIE DIFFERENZEN ZWISCHEN DEN ZAHLEN, DIE ZU DEN n ERSTEN PRIMZAHLEN TEILERFREMD SIND

Von

R. J. BACKLUND

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A.-G. SANA

Über die Differenzen zwischen den Zahlen, die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind.

1. Es sei x eine ganze Zahl, p_ν die ν-te Primzahl und r_ν der Rest von x modulo p_ν:

$$x \equiv r_\nu \pmod{p_\nu}, \quad 0 \leqq r_\nu \leqq p_\nu - 1. \tag{1}$$

Wenn wir nur die n ersten Primzahlen in Betracht ziehen und also ν in (1) die Werte von 1 bis n annehmen lassen, so gehört zu jedem x ein System von n Resten,

$$r_1, r_2, r_3, \cdots r_n, \tag{2}$$

und jede Kombination der möglichen Werte dieser Reste wird genau einmal auftreten, wenn x die ganzen Zahlen von 1 bis P_n durchläuft, wo

$$P_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_n$$

ist.

Wenn jede Zahl gestrichen wird, die unter ihren zugehörigen Resten (2) irgend einen vom Werte Null hat, so bleiben die zu P_n teilerfremden Zahlen stehen. Diese Zahlen bezeichnen wir der Reihe nach, mit 1 anfangend, mit

$$q_1, q_2, q_3, \cdots \tag{3}$$

Unter den Restsystemen (2), die zu denjenigen von den Zahlen (3) gehören, die $< P_n$ sind, tritt dann jede Kombination der von Null verschiedenen Reste genau einmal auf, und wir erhalten also für die Anzahl dieser Zahlen den bekannten Ausdruck

$$\varphi(P_n) = (2-1)(3-1)(5-1)\cdots(p_n-1).$$

Wir verallgemeinern nun diese Betrachtung, indem wir danach fragen, wie oft es vorkommt, dass sowohl x als $x + a$ zu P_n teilerfremd sind, wenn a eine gegebene ganze Zahl ist und x alle Restklassen modulo P_n durchläuft.

Wenn a durch die Primzahl p_α teilbar ist, gehören x und $x + a$ zu derselben Restklasse modulo p_α, und x und $x + a$ sind beide zu p_α teilerfremd, wenn $r_\alpha \neq 0$ ist. Wenn dagegen p_λ eine Primzahl ist, die in a nicht aufgeht, gehören x und $x + a$ zu verschiedenen Restklassen modulo p_λ, und zwei Werte von r_λ sind ausgeschlossen, wenn sowohl x als $x + a$ zu p_λ teilerfremd sind. Es seien $p_\alpha, p_\beta, \cdots$ alle Primzahlen $\leqq p_n$, die in a aufgehen und $p_\lambda, p_\mu, \cdots$ alle Primzahlen $\leqq p_n$, die in a nicht aufgehen. Die gesuchte Anzahl, die wir mit (a) bezeichnen, ist nun wieder gleich der Anzahl der Kombinationen derjenigen Reste (2), die unter den gemachten Voraussetzungen möglich sind, und wird also durch die folgende Gleichung bestimmt:

(4) $$(a) = (p_\alpha - 1)(p_\beta - 1) \cdots (p_\lambda - 2)(p_\mu - 2) \cdots$$

So ist z. B. die Anzahl der Fälle, dass sowohl x als $x + 10$ zu $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ teilerfremd sind, wenn $0 < x < 210$ ist,

$$(10) = (2 - 1)(3 - 2)(5 - 1)(7 - 2) = 20.$$

Wenn allgemein die Zahlen $0, a, b, c, \cdots$ zu k_ν Restklassen modulo p_ν gehören $(\nu = 1, 2, \cdots n)$, und wenn $(a, b, c, \cdots)$ die Anzahl derjenigen Restklassen modulo P_n bezeichnet, zu denen x gehören kann, wenn $x, x + a, x + b, x + c, \cdots$ sämtlich zu P_n teilerfremd sein sollen, so ist

(5) $$(a, b, c, \cdots) = \prod_{\nu=1}^{n} (p_\nu - k_\nu).$$

2. Wir fragen nun weiter, wie oft eine Differenz a zwischen zwei *aufeinanderfolgenden*, zu P_n teilerfremden Zahlen vorkommt, also für wie viele $m \leqq \varphi(P_n)$ eine Beziehung

(6) $$q_{m+1} - q_m = a$$

zwischen Zahlen der Reihe (3) besteht.

Diese Anzahl, die wir mit $\{a\}$ bezeichnen, ist offenbar gleich der Anzahl derjenigen Fälle, dass x und $x+a$ beide zu P_n teilerfremd sind, wenn x alle ganzen Zahlen von 1 bis P_n durchläuft, vermindert mit der Anzahl derjenigen Fälle, dass x und $x+a$ und noch irgend eine zwischen x und $x+a$ liegende Zahl zu P_n teilerfremd sind, vermehrt mit der Anzahl der Fälle, dass x, $x+a$ und irgend zwei zwischen x und $x+a$ liegende Zahlen zu P_n teilerfremd sind, und so weiter, d. h. wir haben

$$\{a\} = (a) - \sum_i (i, a) + \sum_{i,j} (i, j, a) - \cdots, \tag{7}$$

wo die erste Summe über alle ganzen Zahlen i zwischen 0 und a zu nehmen ist, die zweite Summe über alle verschiedenen Kombinationen von zwei solchen Zahlen, usw.

So ist z. B.[1])

$$\{6\} = (6) - (2, 6) - (4, 6) + (2, 4, 6).$$

Wenn n gleich 4 genommen wird, also $P_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, wird sodann nach (5)

$$\begin{aligned}\{6\} = (2-1)(3-1)(5-2)(7-2) - (2-1)(3-2)(5-3)(7-3) \\ - (2-1)(3-2)(5-3)(7-3) + (2-1)(3-3)(5-4)(7-4) \\ = 30 - 8 - 8 + 0 = 14,\end{aligned}$$

d. h. $q_{m+1} - q_m$ wird 14 Mal gleich 6 für $m \leqq \varphi(210) = 48$.

3. Wir können auf diese Weise bei einem gegebenen n die vorkommenden Differenzen zwischen den Zahlen (3) aufzählen. Allgemeinere Schlüsse aus diesen Formeln zu ziehen, ist aber offenbar sehr schwierig. Über die Verteilung der Zahlen (3) ist überhaupt sehr wenig bekannt.

Legendre[2]) hat den Satz ausgesprochen, dass für jedes n

---

[1]) Für Kombinationen, die ungerade Differenzen enthalten, verschwinden die Ausdrücke (5) ja stets wegen des Faktors (2—2) und können deshalb sogleich fortgelassen werden.

[2]) *Théorie des Nombres*, Tome II, Paris 1830, S. 71—79.

(8) $$q_{m+1} - q_m \leqq 2\, p_{n-1}$$

sei. Sein Beweis ist aber nicht stichhaltig. LEJEUNE-DIRICHLET[1]) erwähnt, dass er vergebens versucht hat die Behauptung von LEGENDRE zu beweisen, und sie ist noch heute unbewiesen.

Aus (8) würde u. a. folgen, wie LEGENDRE auch gezeigt hat, dass zwischen x und $x + 2\sqrt{x}$ stets eine Primzahl liegen müsste, also dass

$$p_{n+1} - p_n < 2\sqrt{p_n}$$

wäre, während bis jetzt nur die Abschätzung

$$p_{n+1} - p_n = O\left(p_n e^{-a\sqrt{\log p_n}}\right),$$

wo a eine Konstante bezeichnet, bewiesen ist[2]).

4. Jedenfalls ist die obere Grenze von $q_{m+1} - q_m$ nicht kleiner als $2\, p_{n-1}$, denn es gilt der folgende Satz.

Für wenigstens zwei Werte $m \leqq \varphi(P_n)$ *ist*

(9) $$q_{m+1} - q_m = 2\, p_{n-1},$$

wenn $n > 2$ *ist.*

Wir bemerken, dass $\nu P_{n-2} + k$, wo ν eine ganze Zahl bezeichnet und $n > 2$ ist, stets mit P_n gemeinsame Teiler hat, wenn $k = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots \pm (p_{n-1} - 1)$ ist. Ferner können wir eine Zahl $\nu_1 < p_{n-1} p_n$ so bestimmen, dass $\nu_1 P_{n-2} - 1$ durch p_{n-1} und $\nu_1 P_{n-2} + 1$ durch p_n teilbar ist, sowie eine Zahl $\nu_2 < p_{n-1} p_n$, so dass $\nu_2 P_{n-2} - 1$ durch p_n und $\nu_2 P_{n-2} + 1$ durch p_{n-1} teilbar ist. Wenn ν einen von diesen zwei Werten hat, sind $\nu P_{n-2} - p_{n-1}$ und $\nu P_{n-2} + p_{n-1}$ zu P_n teilerfremde Zahlen, zwischen denen keine andere zu P_n teilerfremde Zahl liegt. Wenigstens die erste von ihnen ist $< P_n$ und hat also

[1]) *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*, Abh. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss. 1837.

[2]) H. BOHR und H. CRAMER, *Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie*, Enzykl. der math. Wiss. II. C. 8. S. 807—808.

in der Reihe (3) einen Index $\leqq \varphi(P_n)$. Hiermit ist der Satz bewiesen.

So findet man z. B. unter den zu $P_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ teilerfremden Zahlen die Paare 127 und 113 ($4 \times 30 \pm 7$) sowie 2197 und 2183 ($73 \times 30 \pm 7$), welche (8) genügen.

5. Aus dem obigen Satze in Verbindung mit dem Primzahlsatze folgt der folgende Satz über die Differenzen zwischen absoluten Primzahlen.

Es gibt unendlich viele Primzahlen, welche der Ungleichung

(10) $$p_{m+1} - p_m > (2 - \varepsilon) \log p_m$$

genügen, wie klein auch die positive Zahl ε *gewählt werde.*

Aus dem Primzahlsatze[1])

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet, folgt direkt nur, dass für unendlich viele Werte m

$$p_{m+1} - p_m > \log p_m$$

sein muss. Daraus folgt aber auch[2])

$$\log P_n \sim p_n \sim p_{n-1}.$$

Wie klein auch die positive Zahl ε gewählt wird, ist also für alle hinreichend grossen n

$$p_{n-1} > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \log P_n,$$

und also auch, wenn p_m eine Primzahl $< P_n$ bezeichnet,

(11) $$p_{n-1} > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \log p_m.$$

---

[1]) Die „asymptotische Gleichung" $f(x) \sim \varphi(x)$ bedeutet, dass $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$ ist.

[2]) LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, S. 83.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt nun, dass es Primzahlen p_m gibt, die $< P_n$ sind und der Bedingung

$$p_{m+1} - p_m \geqq 2\, p_{n-1}$$

und also nach (11) auch der Ungleichung (10) genügen.

6. Für kleinere Werte n kann die obere Grenze der Differenz (6) leicht numerisch bestimmt werden. Ich habe nach (7) die Werte von $\{a\}$ für $a \leqq 34$ und $n \leqq 8$, also $p_n \leqq 19$, berechnet. Die folgende Tafel enthält die Resultate der Rechnungen und gibt also an, wie oft eine Differenz $q_{m+1} - q_m$ von gegebener Grösse zwischen den zu $P_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_n$ teilerfremden Zahlen (3) vorkommt, wenn m die Werte von 1 bis $\varphi(P_n)$ durchläuft.

Differenz	$p_n =$							
	2	3	5	7	11	13	17	19
2	1	1	3	15	135	1 485	22 275	378 675
4		1	3	15	135	1 485	22 275	378 675
6			2	14	142	1 690	26 630	470 630
8				2	28	394	6 812	128 810
10				2	30	438	7 734	148 530
12					8	188	4 096	90 124
14					2	58	1 406	33 206
16						12	432	12 372
18						8	376	12 424
20						0	24	1 440
22						2	78	2 622
24							20	1 136
26							2	142
28								72
30								20
32								0
34								2
Summe	1	2	8	48	480	5 760	92 160	1 658 880

Für jedes $n\,(> 1)$ ist die grösste der angeführten Differenzen gleich $2\,p_{n-1}$ und weil zugleich die Gesamtanzahl derselben in

jedem Falle gleich $\varphi(P_n)$ ist, so sind tatsächlich sämtliche vorkommende Werte von (6) aufgezählt, und es ist also für jeden von diesen Werten n dargelegt, dass es keine Differenz (6) gibt, die grösser als $2\,p_{n-1}$ wäre. Die Legendresche Behauptung (8) wird also für $p_n \leqq 19$ bestätigt.

ZUR THEORIE DER PROJEKTIVEN VIELSEITE

Von

E. KIVIKOSKI

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A.-G. SANA

Zur Theorie der projektiven Vielseite

Von

E. Kivikoski

1. In einer früheren Abhandlung [1]) hat der Verfasser die Anfangsgründe einer Theorie der Streckenzüge in der projektiven Ebene entwickelt. Der Zweck der folgenden Zeilen ist, diese Theorie einen kleinen Schritt weiter zu führen.

Hier beschränken wir uns gänzlich auf diejenigen Streckenzüge, die in Str als „regulär" bezeichnet worden sind, d. h. Streckenzüge, in denen keine zwei benachbarte Seiten in derselben Geraden liegen. Ausserdem werden wir meistenteils voraussetzen, dass der Streckenzug *geschlossen,* d. h. ein *Vielseit* ist.

Eine Seite des regulären Vielseits heisst *Inflexions-* oder *Konvexseite,* je nachdem die betreffende *Seitengerade,* d. h. die Gerade, welche die Seite enthält, das Vielseit in dieser Seite schneidet oder berührt. (Vgl. Str S. 13—15). Von zwei Inflexions- bzw. Konvexseiten sagen wir, dass sie derselben *Art* sind.

2. Wir beginnen mit einigen, im Folgenden zur Anwendung kommenden Ergänzungen des Satzes 40 in Str, der sich auf die Teilung des Inneren eines paaren *einfachen* Vielseits durch einen *Querschnitt* bezieht.

Satz 1. *Im Innern eines paaren einfachen Vielseits, dessen Seitenzahl grösser als drei ist, kann immer eine* **Diagonale** *gezogen werden,* d. h. ein einseitiger Querschnitt (Strecke), der zwei Eckpunkte des Vielseits verbindet.

---

[1]) E. Kivikoski, Über Streckenzüge in der projektiven Ebene. Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Serie A. Tom. XXVIII, N:o 14. 1928. Diese Abhandlung wird im Folgenden immer unter Str zitiert.

Um dies zu beweisen, bezeichnen wir das Vielseit mit v und ziehen von einem Eckpunkte E aus einen geradlinigen Querschnitt EL des Inneren von v (Fig. 1). Sollte der Punkt L ein Eckpunkt sein, so wäre EL eine Diagonale. Wir können daher annehmen, dass L ein innerer Punkt einer Seite KM ist. Jetzt ziehen wir die Strecken EK und EM, die resp. mit den Streckenzügen ELK und ELM paare Dreiseite bilden. Auch das so entstandene Dreiseit EKM ist paar. (Vgl. Str S. 24). Im Falle keine der gezogenen Strecken eine Diagonale des Inneren von v ist, ziehen wir von E aus Geraden durch alle Eckpunkte von v, die sich auf dem Dreiseit EKM oder im Innern desselben befinden.

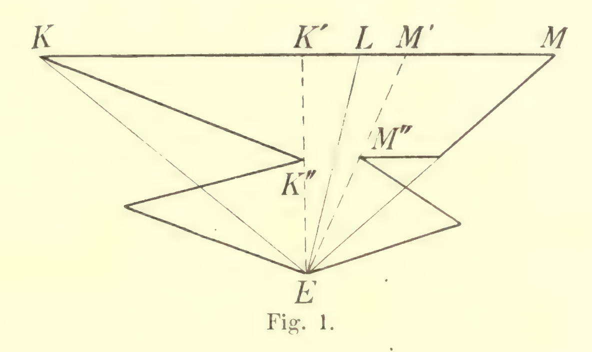


Fig. 1.

Die Seite KM wird von jeder dieser Geraden getroffen. Es seien K' der letzte im Sinne KLM dem Punkt L vorangehende und M' der erste in diesem Sinne dem Punkt L nachfolgende Treffpunkt. Auf denjenigen Strecken EK' und EM', die Querschnitte des Inneren des Dreiseits EKM sind, wählen wir nun die Strecken EK'' und EM'' derart, dass die Punkte K'' und M'' Ecken von v sind, während kein Eckpunkt ein innerer Punkt dieser Strecken ist. Speziell kann die Strecke EK'' mit einer der dem Eckpunkt E anliegenden Seiten von v zusammenfallen. Wenn dies aber nicht der Fall ist, hat EK'', von den Endpunkten abgesehen, keinen Punkt mit v gemein. Denn wäre P ein solcher Punkt, müsste er ein innerer Punkt einer Seite s von v sein und somit der Schnittpunkt von EK' und s, woraus folgen würde, dass entweder ein Endpunkt der Strecke s sich im Innern des Dreiseits ELK' be-

fände oder dass dieses Dreiseit von jener Strecke noch in einem zweiten Punkt geschnitten würde. Beides ist aber ausgeschlossen. Denn erstens enthält das Innere des genannten Dreiseits keinen Eckpunkt von v, und zweitens werden die Seiten EL und LK' von s gar nicht getroffen. Die Strecke EK'' ist somit unter der gemachten Voraussetzung eine Diagonale des Inneren von v. Dasselbe ist von der Strecke EM'' zu sagen, wenn sie von den in E zusammenstossenden Seiten des Vielseits verschieden ist. In dem Falle endlich, dass die beiden Strecken EK'' und EM'' sich als Seiten des Vielseits erweisen, ist wenigstens einer der Punkte K'' und M'' von den Punkten K und M verschieden, weil die Seitenzahl des Vielseits grösser als drei ist. Infolgedessen können die Punkte K'' und M'' vermittelst einer Strecke verbunden werden, die ein Querschnitt des Dreiseits $EK'M'$ und somit auch ein Querschnitt des Inneren von v ist. Jedenfalls haben wir also eine Diagonale des Inneren von v gefunden.

Die Diagonale bildet mit den ihr *entsprechenden Segmenten* (Str S. 7 u. 12) von v zwei neue paare einfache Vielseite, deren Seitenzahlen kleiner als die Seitenzahl von v sind. In dem Inneren dieser neuen Vielseite können wir wieder, sobald die Seitenzahlen derselben grösser als drei sind, Diagonalen ziehen, usw. In Verbindung mit dem zitierten Satz 40 in Str ergibt sich daraus der

Satz 2. *Das Innere eines paaren einfachen Vielseits kann immer durch Diagonalen in* **Dreiecke**[1] *zerlegt werden.*

Diesem Satze können wir noch eine andere, in manchen Anwendungen vorkommende Fassung geben. Es sei v' eines der neuen Vielseite, die durch das Ziehen einer Diagonale d im Innern von v entstanden sind. Falls die Seitenzahl von v' grösser als drei ist, ziehen wir wieder im Innern desselben eine Diagonale d' und bezeichnen mit v'' dasjenige der dadurch entstandenen neuen Vielseite, welches d nicht enthält, dessen Seiten somit, abge-

[1]) Abweichend von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch verstehen wir hier unter einem „Dreieck“ das Innere eines paaren Dreiseits.

sehen von d', auch Seiten von v sind. Mit v'' fahren wir auf dieselbe Weise fort, falls die Seitenzahl desselben grösser als drei ist, usw. Wir sehen daraus, dass zuletzt ein Dreiseit erhalten wird, von dessen Seiten zwei auch Seiten von v sind, und die dritte eine Diagonale des Inneren von v ist. Somit haben wir den

Satz 3. *Vom Innern eines paaren einfachen Vielseits kann immer durch eine Diagonale ein Dreieck abgetrennt werden.*

3. Sodann führen wir die Begriffe **Ordnung** und **Klasse** eines Vielseits ein. Die erstere ist die grösste Anzahl *Schnitte* (Str S. 15) des Vielseits mit einer Geraden, die letztere die grösste Anzahl der **Tangenten**[1]) des Vielseits, die durch einen Punkt laufen. Dabei müssen wir selbstverständlich von den Eckpunkten absehen. Ferner wird dabei eine Gerade für eine *n-fache* Tangente angesehen, wenn sie *n Berührungssegmente, d. h.* Berührungspunkte oder -seiten, besitzt.

Wie in Str (Satz 5) gezeigt worden ist, können die Vielseite bezüglich der Ordnung in zwei Hauptgattungen, paare und unpaare, eingeteilt werden. Es fragt sich nun, ob eine analoge Einteilung in bezug auf die Klasse zulässig ist. Um diese Frage zu beantworten und auch zu anderen Zwecken schicken wir einige Hilfsätze voraus.

Hilfsatz A. *Wird eine Seite BC eines Vielseits v durch ihr Komplement ersetzt, so finden die folgenden Veränderungen statt:*

1. *Die Schnittzahl derjenigen Geraden (d. h. die Schnittzahl der Geraden und des Vielseits), die BC bzw. ihr Komplement schneiden, wird um eins vermindert bzw. erhöht.*

2. *Die Ordnung des Vielseits wird um eins verändert.*

3. *Auch die Schnittzahl derjenigen Geraden. die durch einen der Punkte B und C laufen, wird um eins verändert, m. a. W. das Vielseit ändert in diesen Punkten oder in den ihnen anliegenden*

---

[1]) Unter einer Tangente bzw. Sekante des Vielseits in einem Segment desselben verstehen wir natürlich eine Gerade, die das Vielseit in diesem Segment berührt bzw. schneidet. (Vgl. Str S. 15).

Seiten seine Lage bezüglich dieser Geraden (eine Berührung geht in ein Schneiden über und umgekehrt).

4. *Die Seite BC geht in eine Seite anderer Art über und auch die Art derjenigen Seiten, welche der Seite BC anliegen, wird verändert.*

Die Wahrheit von N:r 1 ist evident. N:r 2 ist eine Folge von N:r 1. N:r 3 und N:r 4 sind Folgen von N:r 2.

Aus dem obigen folgt der

Hilfsatz B. *Werden in einem Vielseit n Seiten durch ihre Komplemente ersetzt, so werden die Ordnung und die Anzahl der Inflexionsseiten sowie diejenige der Konvexseiten um eine paare oder unpaare Zahl verändert, je nachdem n paar oder unpaar ist.*

Von zwei Vielseiten sagen wir, dass sie **komplementar** sind, oder dass das eine das **Komplement** des anderen ist, wenn ihre Seiten paarweise komplementar sind. Zwei komplementare Vielseite haben natürlich dieselbe Anzahl Seiten. Je nachdem diese Anzahl paar oder unpaar ist, ist die Summe der Ordnungszahlen der Vielseite nach dem vorigen Satze paar oder unpaar. Ferner folgt aus dem Hilfsatze A, dass die komplementaren Seiten zweier komplementaren Vielseite immer ungleicher Art sind und dass die Vielseite in jedem Eckpunkte dieselben Tangenten und dieselben Sekanten haben. Ihre Klassenzahlen sind somit gleich.

Hilfsatz C. *Eine Strecke, deren Endpunkte einem gegebenen Winkelgebiet nicht angehören, wird entweder von jedem oder von keinem inneren Strahl des betreffenden Winkels geschnitten.*

Aus diesem Satze, der unmittelbar aus dem Fundamentalsatze in Str (S. 5) folgt, schliessen wir sofort:

Hilfsatz D. *Wenn die inneren Strahlen eines Winkels keinen der End- und Eckpunkte eines Streckenzuges enthalten, so schneiden sie alle den Streckenzug in gleich vielen Punkten.*

Werden also von einem Punkte O aus Geraden durch die sämtlichen End- und Eckpunkte des Streckenzuges gezogen, so wird der Strahlenbüschel O derart in Winkel geteilt, dass die inneren Strahlen eines jeden derselben den Streckenzug in gleich vielen

Punkten schneiden. Jedem dieser Winkel kommt somit eine bestimmte *Schnittzahl* zu, die angibt, in wie vielen Punkten die inneren Strahlen des Winkels den Streckenzug schneiden. Heisst der Winkel w und der Streckenzug z, so werden wir die betreffende Schnittzahl mit $w \cdot z$ bezeichnen.

4. Indem wir nun zur Beantwortung der aufgestellten Frage zurückschreiten, setzen wir wieder voraus, dass der Streckenzug ein Vielseit v ist, und bezeichnen die oben genannten Winkel im Strahlenbüschel O der Reihe nach mit w_1, $w_2, \cdots, w_n$, mit g den gemeinsamen Schenkel der Winkel w_1 und w_2, (Fig. 2) mit $B_1\, C_1, B_2, C_2, \cdots, B_r\, C_r$ die in g enthaltenen Segmente (d. h. Eckpunkte oder Seiten) von v mit $A_1\, B_1$ und $C_1\, D_1$, $A_2\, B_2$ und $C_2\, D_2 \cdots$, $A_r\, B_r$ und $C_r\, D_r$ der Reihe nach die ihnen anliegenden Seiten von v [1]), mit $s_1, s_2, \cdots, s_r$ resp. die Segmente $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$, $A_2\, B_2\, C_2\, D_2, \cdots, A_r\, B_r\, C_r\, D_r$ und mit $s'_1, s'_2, \cdots, s'_t$ die übrigen Segmente von v. Es ist

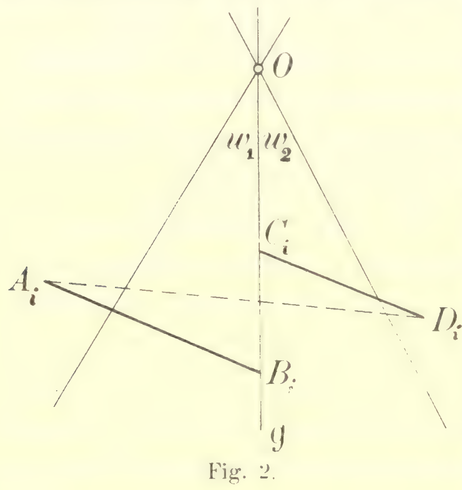


Fig. 2.

$$w_1 \cdot v = \sum_{i=1}^{r} w_1 \cdot s_i + \sum_{j=1}^{t} w_1 \cdot s'_j$$

und

$$w_2 \cdot v = \sum_{i=1}^{r} w_2 \cdot s_i + \sum_{j=1}^{t} w_2 \cdot s'_j$$

Weil nun kein End- oder Eckpunkt von s'_j sich auf den inneren Strahlen des Winkels $w_1 + w_2$ befindet, hat man für jedes j

---

[1]) Man bemerke, dass diese sämtlich von einander verschieden sind.

$$w_1 \cdot s'_j = w_2 \cdot s'_j,$$

und es wird daher aus den obigen Gleichungen durch Subtraktion erhalten

(1) $$w_2 \cdot v - w_1 \cdot v = \sum_{i=1}^{r} (w_2 \cdot s_i - w_1 \cdot s_i) \cdot$$

Um den Wert der einzelnen Differenzen rechter Seite zu bestimmen, nehmen wir zunächst an, dass sich der Punkt O ausserhalb des Segments $B_i C_i$ befinde. Dann haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Vielseit v von g in diesem Segment geschnitten oder berührt wird.

Im ersteren Falle ziehen wir diejenige Strecke $A_i D_i$, die mit dem Segment s_i ein paares Vielseit bildet. Diese wird von g geschnitten, und daher nach dem Hilfsatze D von jedem inneren Strahl des Winkels $w_1 + w_2$. Daraus folgt wieder, dass jeder innere Strahl sowohl des Winkels w_1 als des Winkels w_2 das Segment s_i, d. h. die Seiten $A_i B_i$ und $C_i D_i$, unpaarmal schneiden muss. M. a. W. wird die eine der Seiten $A_i B_i$ und $C_i D_i$ von den inneren Strahlen des einen und die andere dieser Seiten von den inneren Strahlen des anderen der genannten Winkel geschnitten. In diesem Falle haben wir somit

$$w_2 \cdot s_i = w_1 \cdot s_i = 1,$$

und daher

(2) $$w_2 \cdot s_i - w_1 \cdot s_i = 0.$$

Wird die Seite $A_i B_i$ durch ihr Komplement ersetzt, geht der betrachtete Fall in den letzteren der erwähnten Fälle über (Hilfsatz A N:r 3). Zugleich wird nach dem Hilfsatz A N:r 1 die eine der Schnittzahlen $w_1 \cdot s$ und $w_2 \cdot s$ um eins vermehrt, die andere um eins vermindert. Folglich gilt in diesem Falle

3) $$w_2 \cdot s - w_1 \cdot s \,| = 2 \cdot$$

Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) folgt

(4) $$w_2 \cdot v - w_1 \cdot v = 2\,m,$$

wo m eine paare oder unpaare (positive oder negative) *Zahl ist,* je nachdem die Anzahl der Berührungssegmente von v und g paar oder unpaar ist, m. a. W. *je nachdem eine paare oder unpaare Anzahl der von O ausgehenden Tangenten sich in g vereinigen.*

Den bisher ausgeschlossenen Fall, dass O ein innerer Punkt des Segments $B_i\,C_i$ ist, in welchem Falle das Segment selbst eine Seite sein muss, führen wir durch Ersetzen dieser Seite vermittelst ihres Komplements in die schon behandelten Fälle über. Unter Anwendung des Hilfsatzes A kommen wir gleich zu dem Resultat, dass die Gleichung (2) oder (3) gilt, je nachdem v von g in $B_i\,C_i$ berührt oder geschnitten wird. Um diesen Fall in Einklang mit den obigen zu bringen, denken wir uns, dass im Falle des Berührens zwei von O ausgehende Tangenten, nämlich OB_i und OC_i, sich in g vereinigen, während im Falle des Schneidens die eine dieser Geraden für eine Tangente, die andere für eine Sekante anzusehen ist. Nachdem dies festgesetzt ist, gilt die Gleichung (4) mit der Erklärung für m auch in diesem Falle.

Nun hat man identisch

$$(w_2 \cdot v - w_1 \cdot v) + (w_3 \cdot v - w_2 \cdot v) + \cdots + (w_n \cdot v - w_{n-1} \cdot v) + (w_1 \cdot v - w_n \cdot v) = O.$$

Weil auf jede Differenz der linken Seite die Gleichung 4 angewendet werden kann, sieht man, dass die Gesamtzahl der von O ausgehenden Tangenten paar sein muss. Wir haben somit den

Satz 4. *Die Anzahl der Tangenten eines Vielseits, die durch einen von den Eckpunkten verschiedenen Punkt laufen, ist immer paar.*

Speziell ergibt sich daraus

Satz 5. *Die Klasse eines Vielseits ist paar.*

Damit ist die Antwort der aufgestellten Frage erbracht.

5. Es ist klar, dass die Ebene des Vielseits irgendwie derart in Gebiete eingeteilt wird, dass von den Punkten desselben Gebietes dieselbe Anzahl Tangenten ausgeht, während diese Anzahl von einem Gebiet zu einem anderen um eine paare Zahl verändert wird. Im Folgenden werden wir diese Einteilung etwas näher untersuchen.

Es sei E ein Eckpunkt des Vielseits, h und k seien diejenigen Geraden, welche die diesem Eckpunkt anliegenden Seiten enthalten, und s sei eine Strecke, die ganz in einem der Winkelgebiete (hk) enthalten ist. Weil nun die Geraden h und k die Tangenten und Sekanten des Vielseits in E trennen, haben die sämtlichen von den Punkten der Strecke s nach E gezogenen Geraden dieselbe Lage in E bezüglich des Vielseits. Daraus folgt, dass durch *zwei Punkte, die durch eine Strecke verbunden werden können, welche keine der Seitengeraden des Vielseits trifft, gleich viele Tangenten an das Vielseit laufen.* Dasselbe gilt noch, wenn die Punkte durch einen Streckenzug der genannten Art verbunden werden können.

Um die genannten Gebiete zu bestimmen, müssen wir somit zwei Punkte betrachten, die von den Seitengeraden des Vielseits getrennt werden. P und Q (Fig. 3) seien zwei solche Punkte, und s sei eine der Verbindungsstrecken derselben. Wir nehmen an, dass s eine Anzahl Seitengeraden schneidet, aber diese alle in einem einzigen Punkt S. Ferner setzen wir voraus, dass S mit keinem Eckpunkt des Vielseits zusammenfällt, und bezeichnen die in den genannten Seitengeraden enthaltenen Seiten des Vielseits mit $B_i C_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, die Anzahl der vom Punkte P bzw. Q nach den Punkten B_i und C_i laufenden Tangenten mit p_i bzw. q_i, die Anzahl der übrigen von P bzw. Q ausgehenden Tangenten mit p_0 bzw. q_0 und die Gesamtzahl der durch P bzw. Q laufenden Tangenten mit p bzw. q. Man hat dann

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i + p_0$$

und

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i + q_0,$$

woraus, weil $p_0 = q_0$ ist, folgt

$$(1) \qquad p - q = \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)$$

Es erübrigt noch, jede einzelne Differenz $p_i - q_i$ zu bestimmen. Dafür hat man folgende vier Fälle zu unterscheiden:

1. Die Seite $B_i C_i$ ist konvex und S ist ein innerer Punkt derselben.
2. Die Seite $B_i C_i$ ist konvex und S liegt ausserhalb derselben.
3. Die Seite $B_i C_i$ ist eine Inflexionsseite und S ist ein innerer Punkt derselben.
4. Die Seite $B_i C_i$ ist eine Inflexionsseite und S liegt ausserhalb derselben.

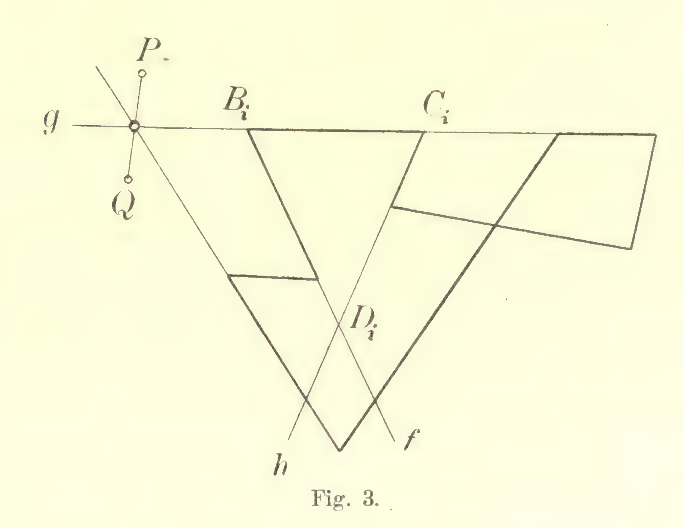


Fig. 3.

Im ersten und zweiten Falle konstruieren wir das der Seite $B_i C_i$ „zugehörige" Dreiseit d. Damit verstehen wir dasjenige Dreiseit, das mit dem Vielseit ein dreiseitiges Segment, dessen mittlere Seite $B_i C_i$ ist, gemein hat. $B_i C_i$ ist somit eine Seite von

d. Seine übrigen Seiten befinden sich auf denjenigen Geraden f und h, welche die der Seite $B_i C_i$ anliegenden Seiten des Vielseits enthalten. Dieses Dreiseit ist paar, weil es von der Geraden $B_i C_i$, die wir mit g bezeichnen, in der Seite $B_i C_i$ berührt wird.

Im ersten Falle wird d nach unseren Voraussetzungen von der Strecke s nur im Punkte S geschnitten. Infolgedessen sind die Punkte P und Q durch d getrennt. Es liege P im Innern von d. Dann geht von P aus keine Tangente an d (Str Satz 14), sodass auch die Geraden PB_i und PC_i das Dreiseit und somit auch das Vielseit schneiden. Weil ferner die Punkte P und Q sowohl durch die Geraden f und g als durch die Geraden g und h getrennt werden, wird das Vielseit von den Geraden QB_i und QC_i berührt. Als Resultat erhalten wir, dass im ersten Falle die Gleichung gilt

$$|p_i - q_i| = 2\,. \tag{2}$$

Im zweiten Falle sind die Punkte P und Q beide im Äussern des Dreiseits d enthalten, woraus folgt, dass von einem jeden derselben zwei Tangenten an das Dreiseit laufen. Es sei der dritte Eckpunkt des Dreiseits D_i. Weil nun die Punkte P und Q nicht durch die Geraden f und h, wohl aber durch die Geraden f und g wie auch durch die Geraden g und h getrennt werden, so haben die Geraden PD_i und QD_i dieselbe Lage bezüglich des Dreiseits, während sowohl die Geraden PB_i und QB_i als die Geraden PC_i und QC_i verschiedene Lagen haben. Daraus folgert man, dass PD_i und QD_i das Dreiseit berühren müssen, und dass sowohl von P als von Q aus nach den Punkten B_i und C_i nur eine Tangente des Dreiseits und somit auch des Vielseits läuft. Dieses Ergebnis wird durch die Gleichung

$$p_i - q_i = 0 \tag{3}$$

ausgedrückt.

Der erste bzw. zweite Fall wird in den dritten bzw. vierten Fall übergeführt, indem z. B. die Seite $A_i B_i$, die der Seite $B_i C_i$ anliegt, durch ihr Komplement ersetzt wird (Hilfsatz A N:r 4). Weil das Vielseit bei dieser Verwandlung seine Lage in bezug

auf die Geraden PC_i und QC_i ändert (Hilfsatz A N:r 3), wird die eine der Zahlen p_i und q_i um eins vermehrt, die andere um eins vermindert. Daraus folgt, dass im dritten Falle die Gleichung (3), im vierten die Gleichung (2) gilt.

Zusammenfassend können wir also sagen, dass beim „Überschreiten" einer Konvexseite oder des Komplements einer Inflexionsseite die Anzahl der durch einen Punkt laufenden Tangenten des Vielseits um zwei verändert wird, während beim Überschreiten einer Inflexionsseite oder des Komplements einer Konvexseite gar keine Veränderung der genannten Zahl stattfindet. Dieses Ergebnis können wir auch wie folgt ausdrücken.

Satz 6. *Werden die sämtlichen Inflexionsseiten eines Vielseits v durch ihre Komplemente ersetzt, so wird ein Vielseit v' erhalten, welches die Ebene derart in Gebiete teilt, dass von den Punkten desselben Gebietes aus dieselbe Anzahl Tangenten an das Vielseit v gezogen werden können.*

Das Vielseit v' wollen wir als das dem Vielseit v zugehörige *Teilervielseit* bezeichnen. Jedem der durch v' bestimmten Gebiete gehört eine *Berührungszahl* an, die angibt, wie viele Tangenten durch jeden Punkt dieses Gebietes an das Vielseit v gezogen werden können. Die verschiedenen Gebieten zugehörigen Berührungszahlen brauchen natürlich nicht verschieden zu sein.

6. Auf Grund des Gesagten können wir nun von der Gleichung (1) auf der Seite 12 einige interessante Folgerungen ziehen. Zunächst können wir jetzt dieser Gleichung die folgende Form geben:

$$p - q = 2m, \tag{4}$$

wo m eine paare bzw. unpaare Zahl ist, je nachdem die Strecke s im Punkte S eine paare bzw. unpaare Anzahl Seiten des dem Vielseit v zugehörigen Teilervielseits v' schneidet. Dann ziehen wir eine Gerade o, die keinen Eckpunkt des Vielseits enthält. Diese wird durch v' in eine Anzahl Strecken s_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ geteilt. Wir ziehen auf jeder dieser Strecken einen inneren Punkt

T_i in Betracht und bezeichnen die Anzahl der durch ihn an v laufenden Tangenten mit t_i. Aus der Identität

$$(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \cdots + (t_1 - t_n) = 0$$

folgert man auf Grund der Gleichung (4), dass die Gerade o insgesamt eine paare Zahl Seiten von v' schneidet. Folglich hat man den

Satz 7. *Das einem Vielseit zugehörige Teilervielseit ist paar.*

Aus diesem Satze kann der folgende, schon in Str ohne Benutzung des Tangentenbegriffes bewiesene Satz äusserst einfach abgeleitet werden.

Satz 8. *Die Anzahl der Inflexionsseiten eines paaren Vielseits ist paar, diejenige eines unpaaren, unpaar.*

Das Teilervielseit v' wird nämlich aus dem ursprünglichen Vielseit v dadurch erhalten, dass die sämtlichen Inflexionsseiten von v durch ihre Komplemente ersetzt werden. Falls die Ordnung von v paar war, hat sie sich bei dieser Operation um eine paare Zahl verändert. Dies bedeutet aber nach dem Hilfsatze B, dass die Anzahl der Inflexionsseiten von v paar sein muss. Auf dieselbe Weise wird der letztere Teil des Satzes bewiesen.

Weil nun den Inflexionsseiten eines Vielseits Konvexseiten im komplementaren Vielseit entsprechen und umgekehrt, haben wir zugleich den folgenden Satz bewiesen.

Satz 9. *Die Anzahl der Konvexseiten eines Vielseits ist paar oder unpaar, je nachdem das Komplement des Vielseits paar oder unpaar ist.*

7. Jetzt wenden wir uns wieder den einfachen Vielseiten und insbesondere den paaren derselben zu. Sei v ein solches und AB und BC zwei benachbarte seiner Seiten (Fig. 4). Offenbar können wir auf dem Komplement von AB eine Strecke BB' bestimmen, die von B abgesehen keinen Punkt mit v gemein hat. Je nachdem nun der Punkt B' dem Äussern oder dem Innern von v angehört, nennen wir die Ecke B *konkav* oder *konvex*. Es ist klar, dass in dieser Definition die Strecke BB' durch eine ent-

sprechende Verlängerung BB'' der Seite BC ersetzt werden kann. Denn das paare Dreiseit ABC, welches das Segment ABC von v enthält, kann von keiner der Strecken $B'B''$ getroffen werden, daher wird es und damit auch das Segment ABC von dem Streckenzug $B'BB''$ in B berührt, woraus folgt, dass die Punkte B' und B'' in demselben der von v bestimmten Gebiete enthalten sind.

Die Konvexität oder Konkavität der Ecke B können wir auch mit Hilfe einer Strecke $A'C'$ definieren, die zwei von B verschiedene Punkte der Seiten AB und BC verbindet, keinen weiteren Punkt mit v gemein hat und die Ecke B *abschneidet* (Str S. 37). Es sei P ein innerer Punkt der Strecke $A'C'$, und PB diejenige Verbindungsstrecke der Punkte P und B, die ein Querschnitt des Inneren des Dreiseits $A'BC'$ ist. Weil der Punkt B' auf der Verlängerung der Seite $A'B$, also im Äussern des Dreiseits sich befindet, so wird das Segment ABC vom Streckenzug PBB' in B geschnitten, und da dieser Streckenzug sonst dem Vielseit v fremd ist, liegen die Punkte P und B' in verschiedenen Gebieten. Daraus ergibt sich, dass die Ecke B konkav oder konvex ist, je nachdem die Strecke $A'C'$ ein Querschnitt des Inneren oder Äusseren von v ist.

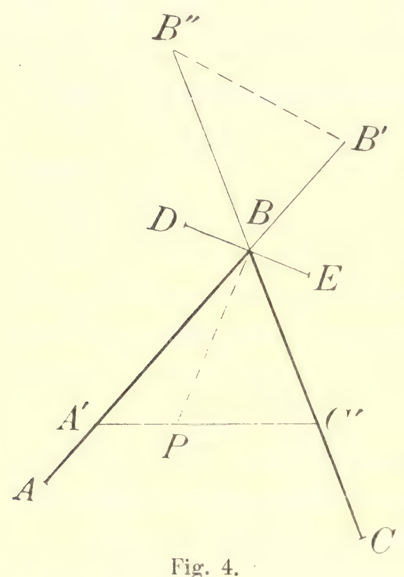


Fig. 4.

Wir können der obigen Definition noch eine dritte Fassung geben. Wird durch den Punkt B eine Strecke DE gezogen, die v in B berührt, sonst aber dem Vielseit fremd ist, so sind die von B verschiedenen Punkte dieser Strecke in ein und demselben Gebiete enthalten. Nun befinden sich die Punkte B' und D beide im Äussern des Dreiseits $A'BC'$. Infolgedessen wird das Segment ABC von dem Streckenzug DBB' in B berührt, woraus wieder folgt, dass D und B' in demselben Gebiete enthalten sind. Also

ist die Ecke B konkav oder konvex, je nachdem die Punkte D und E im Äussern oder im Innern von v enthalten sind.

Die Art der Ecken eines paaren einfachen Vielseits hängt mit der Art der Seiten innig zusammen, wie aus dem folgenden Satz hervorgeht.

Satz 10. *Die einer Konvexseite anliegenden Ecken sind gleicher Art (beide konkav oder beide konvex), während die einer Inflexionsseite anliegenden ungleicher Art sind.*

Um dies zu beweisen, bezeichnen wir eine Seite des Vielseits mit AB, und mit AA' und BB' ihre Verlängerungen oben besprochener Art. Je nachdem nun AB eine Konvex- oder Inflexionsseite ist, wird das Vielseit von der Strecke $A'ABB'$ in der Seite AB berührt oder geschnitten. Im ersten Falle befinden sich die Punkte A' und B' in demselben Gebiete, im zweiten in verschiedenen Gebieten, woraus der Satz nach unserer ersten Definition folgt.

Aus dem Satze 3 folgt unmittelbar der

Satz 11. *Das paare einfache Vielseit besitzt immer wenigstens eine konkave Ecke.*

Durch diesen Satz wird die Möglichkeit ausgeschlossen, dass die sämtlichen Ecken konvex wären.

8. Ein aus lauter Konvexseiten bestehendes Vielseit nennen wir *konvex.* Die Ordnung desselben ist nach dem Satze 8 paar. Ausserdem fällt es mit dem ihm zugehörigen Teilervielseit zusammen. Falls es einfach ist, sind seine Ecken nach den Sätzen 10 und 11 sämtlich konkav. Umgekehrt folgt aus den genannten Sätzen, dass ein einfaches paares Vielseit, dessen sämtliche Ecken derselben Art, also konkav sind, konvex ist.

Im Folgenden wollen wir die Ordnung und Klasse der einfachen konvexen Vielseite bestimmen. Zunächst gilt der

Satz 12. *Ein Vielseit zweiter Ordnung ist einfach und konvex.*

Denn es kann weder Doppelpunkte noch Inflexionsseiten besitzen, weil sonst Geraden vorhanden wären, von welchen es wenigstens dreimal geschnitten würde. Es gilt auch umgekehrt

Satz 13. *Die Ordnung eines einfachen konvexen Vielseits ist zwei.*

Diesen Satz beweisen wir durch die vollständige Induktion, indem wir zeigen, dass er von einem $n+1$-seitigen Vielseit gilt, wenn seine Gültigkeit von einem n-seitigen Vielseit im voraus gesichert ist. Im Falle $n=3$ ist der Satz nämlich schon in Str bewiesen worden.

Das Vielseit mit $n+1$ Seiten sei mit v bezeichnet. Gemäss dem Satz 3 können wir im Innern von v eine Diagonale AC ziehen (Fig. 5), die mit den entsprechenden Segmenten von v ein paares Dreiseit $ABCA$ und ein paares einfaches Vielseit v' bildet. Wir beweisen zunächst, dass auch v' konvex ist. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, dass die Ecken A und C von v' konkav sind. Wir verlängern daher z. B. die gemeinsame Seite CD von v' und v um eine Strecke CC', die von C abgesehen dem Vielseit v fremd ist. Weil die Ecke C in v konkav ist, liegt C' im Äussern von v. Nun ist das Äussere von v ganz im Äussern von v' enthalten (Str Satz 40). C' befindet sich somit auch im Äussern von v'. Infolgedessen ist die Ecke C in v' konvex. Dasselbe gilt natürlich auch von der Ecke A. Aus dem Gesagten ergibt sich zugleich, dass die Seitenzahl von v' n ist, und daher ist die Ordnung desselben 2.

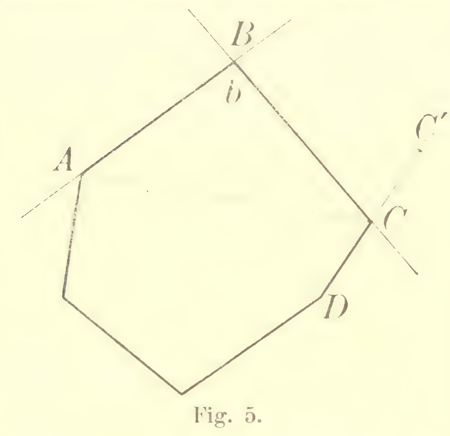


Fig. 5.

Um nun über die Ordnung des Vielseits v ins Klare zu kommen, müssen wir die Maximalzahl der Schnitte desselben mit einer Geraden bestimmen. Dabei dürfen wir diejenigen Geraden, die einen Eckpunkt enthalten, ganz ausser Acht lassen, weil die maximale Schnittzahl schon bei übrigen Geraden vorkommt, wie aus dem Beweise des Satzes 4 hervorgeht. Ferner brauchen wir von diesen Geraden natürlich nur diejenigen zu berücksichtigen, die das Dreiseit $ABCA$ schneiden. Wir haben somit nur zweierlei

Geraden zu betrachten: Geraden, die CA und AB oder BC schneiden, und Geraden, die AB und BC schneiden. Die ersteren schneiden das Vielseit v' ausser in einem Punkte der Seite CA in einem und nur einem weiteren Punkte, d. h. sie schneiden das Vielseit v zweimal. Es bleiben somit nur die letzteren Geraden übrig. Um deren Schnittzahlen zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass die Geraden BC und BA das Vielseit v' in C bzw. A berühren, weil die Strecken BC und BA sowie deren Verlängerungen über A und C, von den Punkten C und A abgesehen, sich im Äussern von v' befinden. Nun wird die Tangente eines Vielseits zweiter Ordnung von dem Vielseit nicht geschnitten. Daraus folgt, dass das Vielseit v' ein und demselben der Winkelbereiche [1]) angehört, der von den genannten Geraden eingeschlossen wird, nämlich demjenigen, der die Strecke AC enthält. Dieser Bereich sei mit b bezeichnet. Ihm gehört auch das Dreiseit $ABCD$ mit seinem Inneren an. Von einer Geraden, welche die Strecken AB und BC schneidet, enthält der Bereich b nur eine Strecke, welche die Schnittpunkte verbindet. Die inneren Punkte dieser Strecke sind auch im Innern des Dreiseits $ABCA$ enthalten. Die Strecke liegt somit ganz im Äussern von v'. Demzufolge schneidet die betreffende Gerade das Vielseit v' gar nicht, und daher das Vielseit v nur zweimal. Damit ist der Satz bewiesen worden.

Zum Schluss wollen wir noch hervorheben, dass dieser Satz, der dem bekannten *Möbiusschen* Satze über einfache singularitätsfreie Kurven analog ist, hier ohne Benutzung irgend welcher Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen worden ist.

An die Seite des bewiesenen Satzes ist der folgende zu stellen.

Satz 14. *Die Klasse eines einfachen konvexen Vielseits ist zwei.*

Weil nämlich das Vielseit zweiter Ordnung ist, wird es von keiner seiner Tangenten geschnitten. Infolgedessen kann durch einen Punkt des Inneren des Vielseits keine Tangente gezogen

1) Unter einem Winkelbereich verstehen wir das Winkelgebiet einschliesslich seiner Grenze.

werden (Str Satz 37). Weil es ferner mit seinem Teilervielseit zusammenfällt, können durch jeden Punkt im Äussern desselben zwei Tangenten gezogen werden, woraus der Satz sich ergibt.

Aus den Sätzen 12 und 14 folgt unmittelbar der

Satz 15. *Ein Vielseit zweiter Ordnung ist auch zweiter Klasse.*

Dieser Satz ist aber nicht umkehrbar, wie schon das Beispiel eines unpaaren Dreiseits zeigt. Ein allgemeineres Beispiel wird vom Komplement v' eines einfachen konvexen Vielseits v dargestellt, dessen Ordnung gleich seiner Seitenzahl ist, also beliebig hoch sein kann. Man kann nämlich eine Gerade g ziehen, die v nicht trifft, denn die beiden von einem Punkte P an v ausgehenden Tangenten teilen den Strahlenbüschel um P in zwei Winkel derart, dass die inneren Strahlen des einen Winkels das Vielseit v zweimal schneiden und die inneren Strahlen des anderen Winkels das Vielseit v gar nicht treffen. Diese Gerade g muss jede Seite von v' schneiden.

Wir wollen uns nun die Frage aufstellen, was für ein Vielseit ein Vielseit zweiter Klasse überhaupt sein kann. Zunächst folgt aus dem Beweise des Satzes 6 (erster Fall S. 13), dass *keine seiner Konvexseiten von einer Tangente geschnitten werden kann*, weil sonst auf dieser Tangente ein Punkt zu finden wäre, von welchem aus wenigstens drei Tangenten an das Vielseit gezogen werden könnten. Daraus wieder folgt, dass *seine Seiten sämtlich derselben Art sein müssen.* Denn es werde angenommen, dass es Seiten beider Art besitze. Dann könnte man zwei einander anliegende Seiten finden, von denen die eine *(AB)* Inflexions-, die andere *(BC)* Konvexseite wäre. Ferner könnte man eine Tangente im Punkte A ziehen, die die Seite BC schnitte, weil das der Seite AB zugehörige Dreiseit unpaar wäre. Dies ist aber nach dem Vorigen ausgeschlossen.

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass das Teilervielseit eines Vielseits zweiter Klasse konvex ist, entweder mit dem Vielseit selbst oder mit seinem Komplement zusammenfällt und daher auch zweiter Klasse ist. Nun lässt es sich noch leicht zeigen, dass *ein*

konvexes Vielseit zweiter Klasse immer einfach ist. Es wird nach dem Obigen von keiner seiner Tangenten geschnitten. Infolgedessen kann es keinen Doppelpunkt erster Klasse [1]) besitzen. Wenn nämlich zwei seiner Seiten einen inneren Punkt gemein hätten, könnte man immer in einem Endpunkt der einen Seite Tangenten ziehen, die die andere Seite schneiden würden. Aus demselben Grunde müsste ein Doppelpunkt zweiter Klasse, wenn ein solcher vorhanden wäre, ein Vereinigungspunkt zweier Eckpunkte sein, und jede Tangente in einem dieser Punkte müsste das Vielseit auch im anderen berühren, d. h. sie müsste eine Doppeltangente sein, was bei einem Vielseit zweiter Klasse ausgeschlossen ist. Das Vielseit ist somit doppelpunktlos, wie behauptet wurde. Insbesondere ergibt sich daraus, dass das einem Vielseit zweiter Klasse zugehörige Teilervielseit, das ja konvex ist, auch einfach ist. Mithin ist das Vielseit entweder selbst konvex und einfach oder das Komplement eines solchen Vielseits. Im letzteren Falle sind seine Seiten sämtlich Inflexionsseiten und eine jede derselben wird von jeder ihm nicht anliegenden Seite geschnitten. Bezeichnen wir ein Vielseit mit lauter Inflexionsseiten als **Inflexionsvielseit,** so können wir das Ergebnis der hier durchgeführten Überlegungen wie folgt ausdrücken.

Satz 16. *Ein Vielseit zweiter Klasse ist entweder konvex und einfach oder ein Inflexionsvielseit mit einer maximalen Zahl Doppelpunkte erster Klasse.*

Die höchstmögliche Zahl der Doppelpunkte erster Klasse ist offenbar $\frac{n(n-3)}{2}$, wo n die Seitenzahl bedeutet. Es ist klar, dass ein Vielseit, welches diese Anzahl Doppelpunkte erster Klasse besitzt, keine andere Doppelpunkte haben kann.

Der obige Satz ist auch umkehrbar, denn das Komplement eines Inflexionsvielseits der genannten Art ist notwendig konvex und einfach, also ein Vielseit zweiter Klasse.

---

[1]) Über die Klassifizierung der Doppelpunkte und über die damit zusammenhängenden Sätze, die hier angewendet werden, siehe Str S. 8 und 9.

ZUR THEORIE DER DIOPHANTISCHEN APPROXIMATIONEN

Von

NILS PIPPING

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A-G. SANA

Einleitung.

MINKOWSKI[1]) gründet — wie bekannt — seine zahlentheoretische Methode auf den folgenden

Fundamentalsatz. *Im n-dimensionalen Raume ist jeder konvexe Körper mit einem Gitterpunkt als Mittelpunkt, der sonst aber im Inneren keinen Gitterpunkt aufweist, seinem Volumen nach* $\leqq 2^n$.

Aus dem Fundamentalsatz folgt unmittelbar die analytische Beziehung

(I) $$J F_1^n \leqq 2^n$$

(vgl. unten (2)), welche in der MINKOWSKIschen Zahlentheorie viele und verschiedenartige Dienste leistet.

Die Beziehung (I) ist indessen nur ein Spezialfall der allgemeineren Beziehung

(II) $$J F_1 F_2 \cdots F_n \leqq 2^n$$

(vgl. (3)), welche MINKOWSKI indessen nur selten in Anwendung bringt. In seinem Buche „Diophantische Approximationen" (c) erwähnt er gar nicht die Beziehung (II), wahrscheinlich deshalb, weil zum Beweis derselben mancherlei Ausführungen nötig sind[2]).

Es ist indessen — so scheint es uns — nicht ohne Interesse zu untersuchen, in welchem Masse z. B. diejenigen Sätze über homogene lineare Formen mit reellen Koeffizienten (vgl. unten § 2), welche MINKOWSKI mit Hilfe der Beziehung (I) bewiesen hat, sich verallgemeinern lassen, indem die Beziehung (II) — statt der Be-

---

[1]) Vgl. das Literaturverzeichnis, die Arbeit (b), S. 76; siehe auch (g).

[2]) Vgl. (b), S. 211; siehe auch (h), wo die Beziehung (II) für $n = 2$ und $n = 3$ durch sehr einfache geometrische Überlegungen bewiesen wurde; in dem allgemeinen Falle gelang es dem Verf. nicht, einen einfachen Beweis zu finden.

ziehung (I) — herangezogen wird. Falls man als Spezialfälle der neuen Sätze die MINKOWSKIschen bekommen will, hat man — statt (II) — die noch allgemeinere Beziehung

$$\text{(III)} \qquad J\, F_1^{a_1} F_2^{a_2} \cdots F_n^{a_n} \leqq 2^n$$

(vgl. (4)), die eine unmittelbare Folge von (II) ist, auszunützen. Die neuen Sätze werden vervollständigt, indem man auch noch die Beziehung

$$\text{(IV)} \qquad J\, F_1\, F_2 \cdots F_n \geqq \frac{2^n}{n!}$$

(vgl. (9)) und die Beziehungen (10) heranzieht; jene (vgl. MINKOWSKI (b), S. 192) wird in Nr 2 bewiesen, diese (vgl. MINKOWSKI (b), S. 189 und (d), Nr 6) leiten wir in Nr 3 her.

Auch in bezug auf *nicht*homogene lineare Formen mit reellen Koeffizienten und Konstanten bewies MINKOWSKI ((e) und (c), Kap. II, § 11 und 12), indem er seine Methode in zweckmässiger Weise variierte, einen Satz (Satz 16 unten), in welchem die Beziehung

$$\text{(V)} \qquad |\, l_1(X_1, X_2)\ l_2(X_1, X_2)\, | \leqq 2^{-2} D$$

(vgl. (66)) das wesentliche Moment bildet. Wir geben unten (vgl. § 4, B) einen geometrischen Beweis desselben Satzes, der mit dem MINKOWSKIschen nahe verwandt ist[1]). Der modifizierte Beweis gilt — wie der ursprüngliche — nur für $n = 2$, d. h. für zwei Formen mit zwei Variabeln.

Es gelang indessen REMAK (i), den betreffenden Satz nicht nur für $n = 2$ sondern auch für $n = 3$ herzuleiten. Leider ist der Beweis ziemlich verwickelt, und wahrscheinlich trifft die Vermutung MORDELLS (f) zu, das Verfahren REMAKS führe in dem allgemeinen Falle n *nicht* zum Ziel. Wenn man einer vollständigen Verall-

---

[1]) Ausser mehreren Verschiedenheiten *formaler* Art gibt es auch eine *sachliche*, die vielleicht nicht ohne Interesse ist. Unsere Hilfssätze 1 und 2 (vgl. Nr 19) sind allgemeiner als die entsprechenden Ergebnisse MINKOWSKIS, und daher lässt sich dasjenige Parallelogramm, auf das wir diese Hilfssätze in Anwendung bringen, sehr einfach wählen (vgl. Nr 20).

gemeinerung des MINKOWSKIschen Satzes (Satz 16) nachstrebt, muss vermutlich erst ein neuer Beweis für den speziellen Fall $n = 2$ ersonnen werden.

Tatsächlich gibt es — ausser den schon erwähnten — noch zwei derartige Beweise; sie stammen von REMAK (k), bzw. von MORDELL (f). Ein Satz von MINKOWSKI (Satz 1 unten) über homogene Formen ist bei denselben von wesentlicher Bedeutung[1]), was irgend einen Zusammenhang zwischen den Theorien der homogenen und der nichthomogenen linearen Formen kundgibt. Als zweites Hauptmoment des Beweises kommen bei MORDELL ein, bei REMAK zwei Hilfssätze über Polynome zweiten Grades vor. Oberflächlich gesehen sind die genannten Hilfssätze verschiedenartig, bei näherer Untersuchung findet man aber einen auffallenden Zusammenhang zwischen ihnen. In § 3 beweisen wir nämlich einen Satz (Satz 5), von welchem als Spezialfälle hervorgehen: 1:o genau der Hilfssatz MORDELLS (Satz 6), 2:o ein Satz (Satz 8), der den wesentlichen Inhalt der beiden Hilfssätze REMAKS wiedergibt. — In demselben § 3 werden noch mehrere Ergebnisse hergeleitet, die nach verschiedenen Richtungen hin die Untersuchungen REMAKS über Polynome vervollständigen.

In § 4, A, wo von nichthomogenen linearen Formen die Rede ist, betrachten wir nicht sofort das Formensystem

$$\text{(VI)} \quad l_\nu(x_1, \cdots, x_n) = a_{\nu,1} x_1 + \cdots + a_{\nu,n} x_n - c_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten a und Konstanten c, sondern wir untersuchen anfangs das spezielle System

$$\text{(VII)} \quad l_\nu(x_1, \cdots, x_\nu) = a_{\nu,1} x_1 + \cdots + a_{\nu,\nu} x_\nu - c_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

mit $a_{\nu,\mu} = 0$ für $\mu > \nu$ (vgl. (50)).

In bezug auf dieses System (VII) beweisen wir in Nr 14 einen Satz (Satz 14), der die verlangte Verallgemeinerung der Beziehung (V) gibt.

---

[1]) MORDELL zieht den genannten Satz heran, und wenn man den Beweis im Anschluss an REMAK führen will, nützt man am besten den MINKOWSKIschen Satz — statt REMAKS „Hilfssatz I" — aus (vgl. unten Nr 16).

Mit Hilfe des Satzes 14 beweisen wir ferner in Nr 15 denselben Satz (Satz 15) in bezug auf das System (VI), *vorausgesetzt, dass die Koeffizienten a der betrachteten Formen rational sind.*

Für $n = 1$ sind die Systeme (VI) und (VII) identisch, und für $n = 2$ lässt sich darlegen, teils im Anschluss an REMAK (k) mit Hilfe der Sätze 1 und 8, teils im Anschluss an MORDELL (f) mit Hilfe der Sätze 1 und 6, dass die Annahme $a_{1,2} = 0$ in Satz 14 *nicht* wesentlich ist (vgl. unten Nr 16); man erhält hierbei den oben erwähnten Satz MINKOWSKIS über nichthomogene lineare Formen (Satz 16).

Nach REMAK (i) ist es ebenfalls keineswegs wesentlich, dass für $n = 3$ die Koeffizienten $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3}$ verschwinden; auch wenn diese Koeffizienten *alle drei* von Null verschieden sind, gilt eine Beziehung, die als direkte Verallgemeinerung der Beziehung (V) anzusehen ist. Wir haben indessen keinen einfachen Beweis hierfür gefunden. In Nr 17 wird nur gezeigt, dass $a_{2,3} \neq 0$ sein darf, falls $a_{1,2} = a_{1,3} = 0$ ist, und dass $a_{1,2} \neq 0$ sein darf, falls $a_{1,3} = a_{2,3} = 0$ ist.

Umsomehr bleibt die Frage offen, ob sich Satz 16 zu dem allgemeinen Falle n Formen mit n Variabeln verallgemeinern lässt oder nicht. Vielleicht markiert jedoch unser Satz 15 einen Schritt vorwärts. Wir erinnern an denjenigen arithmetischen Beweis des MINKOWSKIschen Satzes über homogene lineare Formen (Satz 1 unten), welchen WEBER und WELLSTEIN (l) gegeben haben[1]. Bei ihnen wird der Satz zuerst unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Koeffizienten *rational* sind; ein einfacher Grenzübergang gibt dann den Satz für beliebige reelle Koeffizienten. Es scheint uns nicht ausgeschlossen, dass ein entsprechender Grenzübergang auch für inhomogene Formen möglich ist; in der vorliegenden Arbeit haben wir indessen keine Gelegenheit, auf diese Frage einzugehen.

---

[1]) Vgl. auch HURWITZ (a).

§ 1. Konvexe Körper in Beziehung zu Punktgittern.

1. Im n-dimensionalen $(x_1, \cdots, x_n)$-Raume betrachten wir einen beliebigen konvexen Körper K mit dem Nullpunkt O als Mittelpunkt.

Wir dilatieren den Körper K zu einem dazu bezüglich O homothetischen Körper; dem Dilatationsverhältnis F_ν entspreche hierbei der Körper K_ν. Offenbar sind die Dilatationsverhältnisse

$$0 < F_1 \leqq F_2 \leqq \cdots \leqq F_n \tag{1}$$

eindeutig bestimmt, indem wir die Körper $K_1, K_2, \cdots, K_n$ auf folgende Weise wählen.

Der Körper K_1 enhält im Inneren keinen Gitterpunkt ausser dem Mittelpunkt O; auf die Begrenzung desselben fällt wenigstens ein Gitterpunkt P_1.

Der Körper K_2 enthält eventuelle von O verschiedene innere Gitterpunkte nur auf der Geraden OP_1; auf die Begrenzung des Körpers fällt wenigstens ein Gitterpunkt P_2, welcher der genannten Geraden nicht angehört.

Der Körper K_μ $(\mu = 3, 4, \cdots, n)$ enthält eventuelle von O verschiedene innere Gitterpunkte nur in der Ebene $OP_1 \cdots P_{\mu-1}$; auf die Begrenzung des Körpers fällt wenigstens ein Gitterpunkt P_μ, welcher der genannten Ebene nicht angehört.

Indem wir mit J das Volumen des Körpers K bezeichnen, gibt JF_ν^n das Volumen des Körpers K_ν an. Nach dem in der Einleitung angeführten Fundamentalsatz Minkowskis — auf den Körper K_1 angewandt — erhalten wir mithin

$$JF_1^{\,n} \leqq 2^n. \tag{2}$$

Die Beziehung (2) ist indessen bloss ein Spezialfall der allgemeineren Beziehung

(3) $$J F_1 F_2 \cdots F_n \leqq 2^n,$$

deren Richtigkeit sich ebenfalls mit Hilfe des genannten Fundamentalsatzes beweisen lässt (vgl. Fussnote [2]) auf S. 3). Nach (1) ist (2) eine unmittelbare Folge von (3) — allgemeiner folgt offenbar aus (3) und (1), dass

(4) $$J F_1^{a_1} F_2^{a_2} \cdots F_n^{a_n} \leqq 2^n$$

ist unter der Voraussetzung, dass die a_ν nicht negative ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen

(5) $$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = n, \quad \sum_{\nu=k}^{n} a_\nu \leqq n-(k-1) \quad (k=2, 3, \cdots, n)$$

genügen.

2. Für das Produkt $J F_1 F_2 \cdots F_n$ ergibt sich indessen nicht nur eine *obere* (2^n) sondern auch eine *untere* Grenze, die wir nun herleiten wollen.

Anfangs beweisen wir: *es gibt ein mit dem Gitter* $(x_1, \cdots, x_n)$ *äquivalentes Gitter* $(y_1, \cdots, y_n)$ *mit der Geraden* $O P_1$ *als* y_1*-Achse und der Ebene* $O P_1 \cdots P_\mu$ $(\mu = 2, 3, \cdots, n-1)$ *als* $y_1 y_2 \cdots y_\mu$*-Ebene.*

In der Tat: die Strecke $O P_1$ enthält ausser den Endpunkten gar keinen Gitterpunkt $(x_1, \cdots, x_n)$; wir setzen $P_1 = \Pi_1$. Dann lassen wir die Gerade $O P_1$ zu sich selbst parallel in der Ebene $O P_1 P_2$ gleiten, bis sie zum erstenmal einen Gitterpunkt — und somit eine unendliche Reihe von äquidistanten Gitterpunkten — erreicht; einen beliebigen von ihnen bezeichnen wir mit Π_2. Ferner lassen wir die Ebene $O P_1 P_2$ zu sich selbst parallel in der Ebene $O P_1 P_2 P_3$ gleiten, bis sie zum erstenmal einen Gitterpunkt erreicht. Bei dieser Lage gehört der Ebene ein parallelogrammatisches Netz von Gitterpunkten an; einen beliebigen von ihnen bezeichnen wir mit Π_3. Auf ganz analoge Weise definieren wir sukzessiv die Punkte $\Pi_4, \Pi_5, \cdots, \Pi_n$. Das ergänzte Parallelepiped

$O \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_n$ ist dann ein sogenanntes Elementarparallelepiped, d. h. die 2^n Eckpunkte sind die einzigen Gitterpunkte, welche demselben angehören, so dass es vom Volumen 1 ist. Wenn wir

$$\Pi_1 = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (1, 0, \cdots, 0)$$
$$\Pi_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (0, 1, \cdots, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Pi_n = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (0, 0, \cdots, 1)$$

wählen, ist daher das y-Gitter mit dem x-Gitter äquivalent, d. h. das Gitter in $(y_1, \cdots, y_n)$ stimmt mit jenem in $(x_1, \cdots, x_n)$ völlig überein. Ferner ist $(y_1, \cdots, y_n)$ offenbar ein Gitter mit der Geraden $O P_1$ als y_1-Achse und der Ebene $O P_1 \cdots P_\mu$ $(\mu = 2, 3, \cdots, n-1)$ als $y_1 \cdots y_\mu$-Ebene, d. h. dem Gitter $(y_1, \cdots, y_n)$ kommen alle die oben genannten Eigenschaften zu.

Mit $S_\mu^{(n)}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ bezeichnen wir den Schnitt zwischen der $y_1 \cdots y_\mu$-Ebene und dem Körper K_n; speziell ist $S_1^{(n)}$ die Strecke zwischen den Punkten $-F_n : F_1$ und $+F_n : F_1$ auf der y_1-Achse und $S_n^{(n)}$ ist mit dem Körper K_n identisch.

Ferner bezeichnen wir mit M_μ den maximalen Betrag[1]) der y_μ-Koordinate im Schnitte $S_\mu^{(n)}$. Wir haben dann

$$(6) \qquad M_1 = F_n : F_1$$

und können noch darlegen, dass

$$(7) \qquad M_\mu \geqq F_n : F_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \cdots, n)$$

ist.

Zu dem Ende betrachten wir neben dem Schnitt $S_\mu^{(n)}$ $(\mu = 2, 3, \cdots, n)$ auch den Schnitt $S_\mu^{(\mu)}$ zwischen der $y_1 \cdots y_\mu$-Ebene und dem Körper K_μ. Es sei $Q_\mu = (q_1^{(\mu)}, \cdots, q_{\mu-1}^{\mu}, M_\mu, 0, \cdots, 0)$ ein Punkt dieses Schnittes, wo die y_μ-Koordinate ihren maxi-

---

[1]) O ist *Mittel*punkt des Schnittes $S_\mu^{(n)}$, so dass die y_μ-Koordinate in demselben sowohl den positiven Wert $+M_\mu$ als den negativen Wert $-M_\mu$ erreicht.

malen Betrag $\overline{M}_\mu$ erreicht [1]). Der Punkt P_μ ist ein *Gitter*punkt, welcher der $y_1 \cdots y_{\mu-1}$-Ebene *nicht* angehört, so dass die y_μ-Koordinate desselben ihrem Betrage nach $\geqq 1$ ist. Weil ferner der Punkt P_μ dem Schnitte $S_\mu^{(\mu)}$ angehört, haben wir also

$$\overline{M}_\mu \geqq 1,$$

und weil

$$M_\mu = \frac{F_n}{F_\mu} \cdot \overline{M}_\mu$$

ist, erhalten wir daher $M_\mu \geqq F_n : F_\mu$, d. h. (7).

Nach (6) und (7) ergibt sich

$$M_1 M_2 \cdots M_n \geqq \frac{F_n^n}{F_1 F_2 \cdots F_n}, \tag{8}$$

eine Beziehung, die wir alsbald gebrauchen werden.

Es sei $R_\mu = (r_1^{(\mu)}, \cdots, r_{\mu-1}^{(\mu)}, M_\mu, 0, \cdots, 0)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ ein Punkt des Schnittes $S_\mu^{(n)}$, wo die y_μ-Koordinate ihren maximalen Betrag M_μ erreicht [2]); den in bezug auf O symmetrischen Punkt bezeichnen wir mit R'_μ.

Wir betrachten dasjenige Oktaeder A (für $n = 2$ ein Parallelogramm, für $n = 3$ ein gewöhnliches 3-dimensionales Oktaeder), welches die $2n$ Punkte R_μ und R'_μ zu Eckpunkten hat. Das Volumen $V(A)$ desselben ist

$$V(A) = \int\int_A \cdots \int dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \int\int_A \cdots \int dy_1\, dy_2 \cdots dy_n$$

$$= \frac{2^n}{n!} \begin{vmatrix} M_1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ r_1^{(2)} & M_2 & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{(n-1)} & r_2^{(n-1)} & \cdots M_{n-1} & 0 \\ r_1^{(n)} & r_2^{(n)} & \cdots r_{n-1}^{(n)} & M_n \end{vmatrix} = \frac{2^n}{n!} M_1 M_2 \cdots M_n,$$

---

[1]) Wir dürfen annehmen, dass die y_μ-Koordinate des Punktes Q_μ positiv $(+\overline{M}_\mu)$ und nicht negativ $(-\overline{M}_\mu)$ ist; vgl. Fussnote [1]) auf S. 9.

[2]) Wir dürfen annehmen, dass die y_μ-Koordinate des Punktes R_μ positiv $(+M_\mu)$ und nicht negativ $(-M_\mu)$ ist; vgl. Fussnote [1]) auf S. 9.

und weil das Oktaeder A ganz und gar dem Körper K_n gehört, haben wir also

$$J F_n^n \geqq V(A) = \frac{2^n}{n!} M_1 M_2 \cdots M_n.$$

Nach (8) erhalten wir mithin $J F_n^n \geqq \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{F_n^n}{F_1 F_2 \cdots F_n}$, d. h.

(9) $$J F_1 F_2 \cdots F_n \geqq \frac{2^n}{n!},$$

und die verlangte untere Grenze des Produktes $J F_1 F_2 \cdots F_n$ ist damit gewonnen [1]).

3. Betreffs der $(x_1, \cdots, x_n)$-Koordinaten der in Nr 1 betrachteten Punkte $P_1, \cdots, P_n$ fügen wir noch eine Bemerkung hinzu. Wenn wir $P_\mu = (x_1, \cdots, x_n) = (p_1^{(\mu)}, \cdots, p_n^{(\mu)})$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ setzen und mit D den Betrag der Determinante $|p_\nu^{(\mu)}|$ $(\nu, \mu = 1, 2, \cdots, n)$ bezeichnen, können wir ohne Mühe die Beziehungen

(10) $$0 < D \leqq n!$$

herleiten.

Betrachten wir nämlich dasjenige Oktaeder B, welches die n Punkte P_μ nebst den in bezug auf O symmetrischen Punkten P'_μ zu Eckpunkten hat. Nach dem in der Einleitung angeführten Fundamentalsatz Minkowskis ist das Volumen $V(B)$ desselben $\leqq 2^n$, und weil wir andererseits offenbar $V(B) = \frac{2^n}{n!} \cdot D$ haben, erhalten wir für D die verlangte obere Grenze $n!$. Weil der Punkt P_n der Ebene $O P_1 \cdots P_{n-1}$ *nicht* angehört (vgl. Nr 1), haben wir ferner $D \neq 0$ und daher $D > 0$.

---

1) Aus (1) und (9) geht offenbar die Beziehung

$$J F_1^{\beta_1} F_2^{\beta_2} \cdots F_n^{\beta_n} \geqq \frac{2^n}{n!}$$

hervor, vorausgesetzt, dass die β_ν nicht negative ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu = n, \quad \sum_{\nu=k}^{n} \beta_\nu \geqq n - (k-1) \qquad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

genügen; diese Beziehung findet indessen unten keine Anwendung.

§ 2. Homogene lineare Formen.

4. Nunmehr wollen wir die Beziehungen des vorigen Paragraphen in Anwendung bringen.

Wir betrachten ein System von n homogenen linearen Formen

(11) $$l_\nu(x_1, \cdots, x_n) = a_{\nu,1}\, x_1 + \cdots + a_{\nu,n}\, x_n \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

mit reellen Koeffizienten und nehmen an, dass die Determinante des Formensystems gleich 1 ist:

(12) $$|a_{\nu,\mu}| = 1 \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \cdots, n).$$

Neben dem Koordinatensystem $(x_1, \cdots, x_n) = x$ betrachten wir auch das Koordinatensystem $(l_1, \cdots, l_n) = l$. Nach (11) und (12) ist hierbei das Volumen V irgend eines Körpers dasselbe in den Koordinaten l wie in den Koordinaten x, was wir kurz durch die Formel

(13) $$V_l = V_x$$

zum Ausdruck bringen.

5. Als Körper K (vgl. § 1) wählen wir dasjenige Parallelepiped, welches durch die Beziehungen

(14) $$|l_\nu(x_1, \cdots, x_n)| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

definiert ist.

Das Volumen J des Körpers K hat den Wert (vgl. (13))

$$J = J_x = J_l = \int_K\int \cdots \int dl_1\, dl_2 \cdots dl_n = 2^n,$$

und wir erhalten daher nach (2) $F_1^n \leqq 1$, d. h.

(15) $$F_1 \leqq 1.$$

Nach der Definition des Dilatationsverhältnisses F_1 gibt es einen vom Nullpunkt O verschiedenen Gitterpunkt $x_\nu = X_\nu^{(1)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$, derart, dass[1]

[1] Der Gitterpunkt $X_\nu^{(1)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ gehört wenigstens einer Seitenfläche des durch die Beziehungen (16) definierten Parallelepipeds K_1 an; in wenigstens einer von den genannten Beziehungen gilt daher das Gleichheitszeichen.

(16) $$|l_\nu(X_1^{(1)}, \cdots, X_n^{(1)})| = |l_\nu^{(1)}| \leq F_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

ist; die Beziehungen (15) und (16) geben uns den wohlbekannten Satz Minkowskis [1])

Satz 1. *Es gibt wenigstens ein von* $(0, \cdots, 0)$ *verschiedenes ganzzahliges Wertsystem* $X_\nu^{(1)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$, *derart, dass die* n *Beziehungen*

(17) $$|l_\nu^{(1)}| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

sämtlich gelten, so dass auch

(18) $$\prod_{\nu=1}^{n} |l_\nu^{(1)}| \leqq 1$$

ist.

Satz 1 ist indessen bloss ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes, den wir nunmehr herleiten wollen; statt der Beziehung (2) haben wir dann die allgemeinere Beziehung (4) und daneben die Beziehungen (9) und (10) auszunützen.

Als Körper K wählen wir wieder dasjenige Parallelepiped vom Volumen $J = 2^n$, welches durch die Beziehungen (14) definiert ist. Nach (4) haben wir dann

(19) $$F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \cdots F_n^{\alpha_n} \leq 1$$

und nach (9)

(20) $$\frac{1}{n!} \leqq F_1 F_2 \cdots F_n .$$

Nach der Definition der Dilatationsverhältnisse $F_1, \cdots, F_n$ gibt es wenigstens n Stück vom Nullpunkt O verschiedene Gitterpunkte $(X_1^{(\mu)}, \cdots, X_n^{(\mu)})$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$, derart, dass die n^2 Beziehungen

---

1) Vgl. (b), S. 104—105; siehe auch (c), S. 67—68, wo Minkowski den Satz für $n = 3$ beweist. Aus unseren Überlegungen in Nr 7 wird hervorgehen, weshalb Minkowski für $|l_\nu^{(1)}|$ die obere Grenze $\sqrt[n]{|\Delta|}$ — nicht 1 — erhält.

$$
(21)\qquad
\begin{array}{l}
1)\ |\,l_\nu(X_1^{(1)},\cdots,X_n^{(1)})\,| = |\,l_\nu^{(1)}\,| \leqq F_1 \\
2)\ |\,l_\nu(X_1^{(2)},\cdots,X_n^{(2)})\,| = |\,l_\nu^{(2)}\,| \leqq F_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \\
n)\ |\,l_\nu(X_1^{(n)},\cdots,X_n^{(n)})\,| = |\,l_\nu^{(n)}\,| \leqq F_n
\end{array}
$$

gelten, und in wenigstens einer von den Beziehungen (21) 1), in wenigstens einer von den Beziehungen (21) 2) ,$\cdots$, in wenigstens einer von den Beziehungen (21) n) muss hierbei das Gleichheitszeichen statthaben (vgl. Fussnote [1]) auf S. 12). Wir erhalten m. a. W. nach (21), (19), (20) und (10)

Satz 2. *Es gibt wenigstens n Stück von $(0, \cdots, 0)$ verschiedene ganzzahlige Wertsysteme $(X_1^{(\mu)}, \cdots, X_n^{(\mu)})$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$, derart, dass die Beziehungen*

$$
(22)\qquad |\,l_{\nu_1}^{(\mu_1)}\, l_{\nu_2}^{(\mu_2)} \cdots l_{\nu_n}^{(\mu_n)}\,| \leqq 1
$$

sämtlich gelten, vorausgesetzt, dass

1:o $1 \leqq \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \leqq n$ *ist (die Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_n$ untereinander gleich oder ungleich);*

2:o α_1 *Stück von den Zahlen $\mu_1, \cdots, \mu_n$ gleich 1, α_2 Stück gleich 2, $\cdots$, α_n Stück gleich n sind, wobei $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ nicht negative ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen (5) genügen.*

Wenigstens ein Produkt $|\,l_{\nu_1}^{(1)}\, l_{\nu_2}^{(2)} \cdots l_{\nu_n}^{(n)}\,|$ ist hierbei $\geqq 1 : n!$, und die n Punkte $(X_1^{(\mu)}, \cdots, X_n^{(\mu)})$ lassen sich so wählen, dass der Betrag D der Determinante $|\,X_\nu^{(\mu)}\,|$ $(\nu, \mu = 1, 2, \cdots, n)$ den Bedingungen

$$
0 < D \leqq n!
$$

genügt.

Wir wählen $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 1$ und $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_n = \nu$. Für $\nu = 1, 2, \cdots, n$ gehen dann die Beziehungen (22) des Satzes 2 in die Beziehungen

$$
|\,l_\nu^{(1)}\,|^n \leqq 1
$$

über, und wir erhalten mithin die Beziehungen (17) des Satzes 1. Satz 1 ist daher ein Spezialfall des Satzes 2.

6. Als Körper K wählen wir nun dasjenige Oktaeder (für $n=2$ ein Parallelogramm, für $n=3$ ein gewöhnliches 3-dimensionales Oktaeder), welches durch die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu(x_1, \cdots, x_n) | \leqq 1$$

definiert wird.

Das Volumen J des Körpers K hat dann (vgl. (13)) den Wert

$$J = J_x = J_l = \frac{2^n}{n!},$$

und wir erhalten mithin nach (4)

$$F_1^{a_1} F_2^{a_2} \cdots F_n^{a_n} \leqq n! \tag{23}$$

und nach (9)

$$1 \leqq F_1 F_2 \cdots F_n. \tag{24}$$

Nach der Definition der Dilatationsverhältnisse $F_1, \cdots, F_n$ gibt es wenigstens n Stück vom Nullpunkt O verschiedene Gitterpunkte $(X_1^{(\mu)}, \cdots, X_n^{(\mu)})$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$, derart, dass die n Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu(X_1^{(\mu)}, \cdots, X_n^{(\mu)}) | = \sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu^{(\mu)} | = F_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{25}$$

gelten. Nach (25), (23), (24) und (10) leuchtet der folgende Satz ein:

Satz 3. *Es gibt wenigstens n Stück von $(0, \cdots, 0)$ verschiedene ganzzahlige Wertsysteme $(X_1^{(\mu)}, \cdots, X_n^{(\mu)})$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$, derart, dass*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu^{(1)} |\right)^{a_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu^{(2)} |\right)^{a_2} \cdots \left(\sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu^{(n)} |\right)^{a_n} \leqq n!, \tag{26}$$

$$1 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu^{(1)} | \cdot \sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu^{(2)} | \cdots \sum_{\nu=1}^{n} | l_\nu^{(n)} |$$

ist und dass der Betrag D der Determinante $| X_\nu^{(\mu)} |$ $(\nu, \mu = 1, 2, \cdots, n)$ den Bedingungen

$$0 < D \leqq n!$$

genügt.

Wir wählen speziell $a_1 = n$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ (vgl. (5)) und erhalten[1]) nach (26)

$$(27) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^{(1)} \leqq \sqrt[n]{n!}.$$

Ferner haben wir nach (26) (vgl. (5))

$$(28) \qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^{(1)}\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^{(n)}\right)^{a_n} \leqq \frac{n!}{n^{a_1+a_2+\cdots+a_n}} = \frac{n!}{n^n}.$$

Das arithmetische Mittel aus irgend n Beträgen ist nie kleiner als deren geometrisches Mittel[2]); wir haben mithin

$$(29) \qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^{(\mu)}\right)^{a_\mu} \geqq \left(l_1^{(\mu)} \cdots l_n^{(\mu)}\right)^{\frac{a_\mu}{n}} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n)$$

und erhalten nach (29) und (28)

$$\left(l_1^{(1)} \cdots l_n^{(1)}\right)^{\frac{a_1}{n}} \cdots \left(l_1^{(n)} \cdots l_n^{(n)}\right)^{\frac{a_n}{n}} \leqq \frac{n!}{n^n}.$$

Eine Folge von Satz 3 ist daher

Satz 4. *Es gibt wenigstens n Stück von* $(0, \cdots, 0)$ *verschiedene ganzzahlige Wertsysteme* $(X_1^{(\mu)}, \cdots, X_n^{(\mu)})$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$, *derart, dass*

$$\prod_{\mu=1}^{n} \left(l_1^{(\mu)} l_2^{(\mu)} \cdots l_n^{(\mu)}\right)^{\frac{a_\mu}{n}} \leqq \frac{n!}{n^n}$$

[1]) In seinem Buche Diophantische Approximationen (vgl. S. 77—79) beweist Minkowski die Richtigkeit der Beziehung (27) für $n = 3$. Bei Minkowski ist die obere Grenze $\sqrt[3]{3!\,|\Delta|}$, nicht $\sqrt[3]{3!}$; die Ursache wird aus den Überlegungen in Nr 7 hervorgehen. Daneben zeigt Minkowski, dass das Gleichheitszeichen in den fraglichen Beziehungen nie statthaben kann, eine Frage, auf die wir indessen nicht eingehen wollen.

[2]) Vgl. (b), S. 120.

ist, und dass der Betrag D der Determinante $|X_\nu^{(\mu)}|$ $(\nu, \mu = 1, 2, \cdots, n)$ *den Bedingungen*

$$0 < D \leqq n!$$

genügt.

Wir wählen wieder $a_1 = n, a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ und erhalten [1]) nach Satz 4

$$\prod_{\nu=1}^{n} |l_\nu^{(1)}| \leqq \frac{n!}{n^n}. \tag{30}$$

Für das betreffende Produkt gibt Satz 1 die obere Grenze 1 (vgl. (18)). Durch die Beziehung (30) wird also ein früher gewonnenes Resultat wesentlich verschärft.

7. Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu. Oben wurde durchweg vorausgesetzt, dass die Determinante des betrachteten Formensystems (11) gleich 1 ist. Selbstverständlich müssen die Sätze 1—4 etwas modifiziert werden, falls diese Determinante allgemein $= \Delta \neq 0$ ist, und zwar in folgender Weise.

Wir setzen

$$\begin{aligned} l_1'(x_1, \cdots, x_n) &= \pm \frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta|}} \cdot l_1(x_1, \cdots, x_n) \\ l_2'(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta|}} \cdot l_2(x_1, \cdots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n'(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta|}} \cdot l_n(x_1, \cdots, x_n), \end{aligned} \tag{31}$$

wo $\sqrt[n]{|\Delta|}$ die positive reelle n:te Wurzel aus $|\Delta|$ angibt. In der ersten von den Beziehungen (31) wählen wir das Zeichen +, falls $\Delta > 0$ ist, das Zeichen —, falls $\Delta < 0$ ist. Für das Formensystem (31) ist dann die Determinante gleich + 1, und die Sätze 1—4 lassen sich mithin auf dasselbe in Anwendung bringen, d. h.:

Wenn die Determinante des Formensystems (11) *gleich* $\Delta \neq 0$ *ist, dann muss in den Sätzen* 1—4 *jeder einzelne Faktor (in Satz* 3 *auch jedes einzelne Glied)* $|l_\nu^{(\mu)}|$ *durch* $\frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta|}} \cdot |l_\nu^{(\mu)}|$ *ersetzt werden*; $\sqrt[n]{|\Delta|}$ *gibt hierbei die positive reelle n:te Wurzel aus* $|\Delta|$ *an.*

[1]) Vgl. (c), S. 80—81; vgl. auch Fussnote [1]) auf S. 16 oben.

§ 3. Polynome.

8. Die Formen (11) und (31) in § 2 sind linear und homogen. Unten (vgl. § 4) wollen wir lineare Formen betrachten, die *nicht* homogen sind. Einige Untersuchungen über Polynome müssen indessen vorausgeschickt werden.

Anfangs beweisen wir

Satz 5. *Wenn die Konstanten a, b, c reell sind und den Bedingungen*

$$a > 0, c > 0, \tag{32}$$

$$4\,c \geqq a, \tag{33}$$

$$2\,c \geqq |\,b\,| \tag{34}$$

genügen, gibt es ein Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$, derart, dass $\beta - \alpha \geqq 1$ ist und dass die Beziehung

$$|\,ax^2 + bx\,| \leqq c \tag{35}$$

für jeden Wert x des Intervalles gilt.

Betrachten wir sowohl die Gleichung

$$ax^2 + bx - c = 0$$

mit den Wurzeln

$$x_1 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 + 4\,ac}\right), x_2 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 + 4\,ac}\right)$$

als auch die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit den Wurzeln

$$x_1' = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}\right), x_2' = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}\right).$$

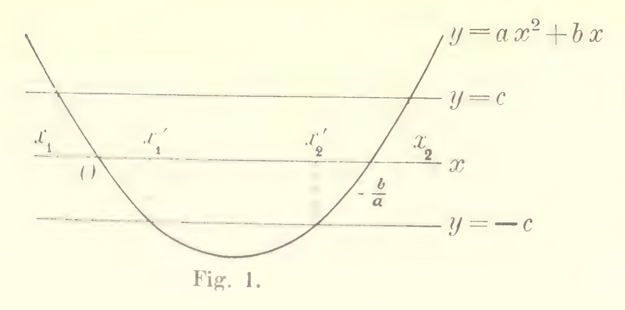


Fig. 1.

Die Parabel $y = ax^2 + bx$ (vgl. Fig. 1) wird offenbar von der Geraden $y = c$ in den Punkten (x_1, c), (x_2, c), von der

Geraden $y = -c$ in den Punkten $(x_1', -c), (x_2', -c)$ geschnitten. Nach (32) sind die Wurzeln x_1 und x_2 reell, und ferner entnehmen wir aus der Figur 1 folgendes:

Falls 1:o $b^2 - 4ac \leqq 0$ ist, so dass die Wurzeln x_1', x_2' komplex oder reell und gleich $(x_1' = x_2' = -b : 2a)$ sind, ist das Intervall x_1, x_2 von dem verlangten Charakter, denn: sobald x dem betreffenden Intervall angehört, gilt die Beziehung (35), und es ist ferner

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{a}\sqrt{b^2 + 4ac} \geqq \frac{1}{a}\sqrt{4ac} = \sqrt{\frac{4c}{a}}$$

und mithin nach (33)

$$x_2 - x_1 \geqq 1.$$

Falls 2:o $b^2 - 4ac > 0$ ist, so dass die Wurzeln x_1', x_2' reell und verschieden sind, ist sowohl das Intervall x_1, x_1' als auch das Intervall x_2', x_2 von dem verlangten Charakter, denn: sobald x irgend einem von den betreffenden Intervallen angehört, gilt die Beziehung (35), und es ist ferner

$$x_1' - x_1 = x_2 - x_2' = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{b^2 + 4ac} - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) =$$

$$\frac{8ac}{2a\left(\sqrt{b^2 + 4ac} + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{4c}{\sqrt{b^2 + 4ac} + \sqrt{b^2 - 4ac}} =$$

$$\frac{4c}{\sqrt{(b^2 + 4ac) + (b^2 - 4ac) + 2\sqrt{b^4 - 16a^2c^2}}} >$$

$$\frac{4c}{\sqrt{2b^2 + 2b^2}} = \frac{2c}{|b|}$$

und mithin nach (34)

$$x_1' - x_1 = x_2 - x_2' > 1.$$

Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

9. In Satz 5 wählen wir speziell $c = \frac{1}{4}$ und erhalten dann den folgenden Satz, der von Mordell (f) herrührt:

Satz 6. *Wenn die Konstanten a und b reell sind und den Bedingungen*

$$0 < a \leqq 1, \quad b \leqq \frac{1}{2}$$

genügen, gibt es ein Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$, *derart, dass* $\beta - \alpha \geqq 1$ *ist und dass die Beziehung*

$$|a x^2 + b x| \geqq \frac{1}{4}$$

für jeden Wert x *des Intervalles gilt.*

Wir wählen speziell $a = 1$ und $c =$ der grösseren von den Zahlen $\frac{1}{4}$ und $\frac{|b|}{2}$:

$$a = 1, c = \max.\left(\frac{1}{4}, \frac{|b|}{2}\right).$$

Die Bedingungen (32), (33) und (34) des Satzes 5 sind dann erfüllt, denn es ist $a = 1 > 0, c \geqq \frac{1}{4} > 0, 4c \geqq 1 = a, 2c \geqq 2 \cdot \frac{|b|}{2} = |b|$.

Indem wir y statt x schreiben, erhalten wir also

Satz 7. *Wenn die Konstante* b *reell ist, gibt es ein Intervall* $\alpha \leqq y \leqq \beta$, *derart, dass* $\beta - \alpha \geqq 1$ *ist und dass die Beziehung*

$$|y(y+b)| \geqq max.\left(\frac{1}{4}, \frac{|b|}{2}\right)$$

für jeden Wert y *des Intervalles gilt.*

Falls $b \geqq 0$ ist, setzen wir $b = p_2 - p_1 \geqq 0$ und $y = x - p_2$, so dass $y + b = x - p_1$ wird; falls $b < 0$ ist, setzen wir $b = p_1 - p_2 < 0$ und $y = x - p_1$, so dass $y + b = x - p_2$ wird.

Jedenfalls haben wir dann

$$|b| = p_2 - p_1, \quad |y(y+b)| = |(x - p_1)(x - p_2)|,$$

und dem Intervall $\alpha \leqq y \leqq \beta$ in Satz 7 entspricht ein Intervall $\alpha' \leqq x \leqq \beta'$ von gleicher Länge: $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha \geqq 1$.

Dem Intervall $\alpha' \leqq x \leqq \beta'$ ($\beta' - \alpha' \geqq 1$) gehört wenigstens eine *ganze* Zahl X an, und eine Folge von Satz 7 ist daher

Satz 8. *Wenn* $p_1 \leqq p_2$ *beliebige reelle Zahlen sind, gibt es wenigstens eine ganze Zahl X, derart, dass das Polynom*

$$P(x) = (x - p_1)(x - p_2)$$

für $x = X$ *seinem Betrage nach höchstens gleich der grösseren von den Zahlen* $\frac{1}{4}$ *und* $\frac{1}{2}(p_2 - p_1)$ *ist* [1]:

$$| P(X) | \leqq max.\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\right).$$

10. Satz 8 geht auch aus Untersuchungen über Polynome n:ten Grades hervor.

Wir betrachten das Polynom

$$P(x) = (x - p_1) \cdots (x - p_n), \tag{36}$$

wo die Zahlen $p_1, \cdots, p_n$ als reell und der Grösse nach geordnet vorausgesetzt werden:

$$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n.$$

Für x setzen wir *ganzzahlige* Werte $x = X$ ein, und mit m bezeichnen wir den kleinsten von allen Werten $| P(X) |$:

$$m = \min. \left(| P(X) | \right).$$

Das Polynom (36) verschwindet stets und nur, wenn irgend ein Faktor $(x - p_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \cdots$ oder $n)$ verschwindet, und wir erhalten mithin

Satz 9. *Stets und nur, wenn irgend eine Zahl* p_ν $(\nu = 1, 2, \cdots$ *oder* $n)$ *ganz ist, verschwindet* m.

11. Im Folgenden nehmen wir an, dass keine von den Zahlen p_ν ganz ist.

Es gibt allerdings ein Minimum m. Denn falls wir mit h die grösste ganze Zahl bezeichnen, die $< p_1$ ist, mit H die kleinste ganze Zahl, die $> p_n$ ist, haben wir $| P(X) | \geqq | P(h) |$ für jede ganze Zahl $X \leqq h$ und $| P(X) | \geqq | P(H) |$ für jede ganze Zahl $X \geqq H$. Der Wert m kommt daher unter denjenigen Werten

---

[1]) Vgl. Remak (k), „Hilfssatz II" und „Hilfssatz III". Vgl. auch Nr 11 unten; dort wird gezeigt, dass das Gleichheitszeichen in der Beziehung $| P(X) | \leqq$ max. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\right)$ nur dann statthat, wenn speziell $p_1 = p_2 = X \pm \frac{1}{2}$ ist.

$|P(X)|$ vor, die für $X = h, h+1, \cdots, H$ erhalten werden. Die Anzahl der betreffenden Werte ist *endlich*, und ein Minimum m existiert mithin; nach Satz 9 haben wir $m > 0$.

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen[1]):

Satz 10. *Es ist $m \leqq 2^{-n}$, wenn es eine ganze Zahl h derart gibt, dass $h < p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n < h+1$ ist; speziell trifft das Gleichheitszeichen zu ($m = 2^{-n}$) stets und nur, wenn $p_1 = p_2 = \cdots$ $\cdots = p_n = h + \frac{1}{2}$ ist.*

Für $\nu = 1, 2, \cdots, n$ haben wir (vgl. Fig. 2)

$$(37)\qquad 0 < (p_\nu - h)(h + 1 - p_\nu) = \frac{1}{4} - \left(h + \frac{1}{2} - p_\nu\right)^2 \leqq 2^{-2},$$

und es ist daher

$$|P(h)\,P(h+1)| = \prod_{\nu=1}^{n} (p_\nu - h)(h + 1 - p_\nu) \leqq (2^{-2})^n = (2^{-n})^2,$$

d. h.

$$(38)\qquad |P(h)| \leqq 2^{-n} \quad \text{oder} \quad |P(h+1)| \leqq 2^{-n}.$$

In den Beziehungen (37) wird die obere Grenze 2^{-2} stets und nur dann

Fig. 2.

erreicht, wenn $h + \frac{1}{2} - p_\nu = 0$ ist, und in den Beziehungen (38) trifft mithin das Gleichheitszeichen stets und nur dann zu, wenn man $p_\nu = h + \frac{1}{2}$ für *jeden* Index $\nu = 1, 2, \cdots, n$ hat. Satz 10 ist damit vollständig bewiesen.

---

[1]) Vgl. REMAK (k); für $n = 2$ ist Satz 10 mit REMAKS „Hilfssatz II“ fast identisch.

12. Wir nehmen jetzt an, dass $n \geqq 2$ ist und bezeichnen mit M die grössere[1]) von den Zahlen 2^{-n} und $\frac{1}{2}(p_n - p_1)^{n-1}$:

$$M = \max.\left(2^{-n}, \frac{1}{2}(p_n - p_1)^{n-1}\right);$$

wir können dann den folgenden Satz beweisen:

Satz 11. *Es ist $m < M$, sobald das Intervall p_1, p_n wenigstens eine ganze Zahl enthält.*

Es bezeichne $h + 1$ die erste ganze Zahl, welche dem Intervall p_1, p_n angehört. Im Intervalle $h, h+1$ liegen dann $1, 2, \cdots$ oder $(n-1)$ Stück Zahlen p, und wir haben mithin (vgl. Fig. 3 und Fig. 4)

$$h < p_1 \leqq \cdots \leqq p_a < h + 1 < p_{a+1} \leqq \cdots \leqq p_n,$$

wobei

(39) $$1 \leqq a < n$$

ist.

Fig. 3.

Zwei Fälle sind nunmehr zu unterscheiden:

1:o $p_1 \geqq h + \frac{1}{2}$ (vgl. Fig. 3). Wir haben dann

$$0 < h + 1 - p_\nu \leqq 2^{-1} \text{ für } \nu = 1, 2, \cdots, a$$

$$0 < p_\mu - (h+1) < p_n - p_1 \text{ für } \mu = a + 1, \cdots, n$$

und erhalten mithin

(40) $$|P(h+1)| = \prod_{\nu=1}^{a}(h + 1 - p_\nu)\prod_{\mu=a+1}^{n}(p_\mu - (h+1)) < 2^{-a}(p_n - p_1)^{n-a}.$$

2:o $p_1 < h + \frac{1}{2}$ (vgl. Fig. 4).

[1]) Es ist $M = 2^{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}(p_n - p_1)^{n-1}$ für $p_n - p_1 = \frac{1}{2}$, $M = 2^{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{2}(p_n - p_1)^{n-1}$ für $p_n - p_1 < \frac{1}{2}$ und $M = \frac{1}{2}(p_n - p_1)^{n-1} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{-n}$ für $p_n - p_1 > \frac{1}{2}$.

Wir bilden dann das Produkt

Fig. 4.

$$|P(h)\,P(h+1)| = \prod_{\nu=1}^{\alpha} (p_\nu - h)\,(h+1-p_\nu) \cdot \prod_{\mu=\alpha+1}^{n} (p_\mu - h)\,(p_\mu - (h+1)).$$

Weil

$$0 < (p_\nu - h)\,(h+1-p_\nu) = \frac{1}{4} - \left(h + \frac{1}{2} - p_\nu\right)^2 \leq 2^{-2}$$

für $\nu = 1, 2, \cdots, \alpha$ und

$$0 < (p_\mu - h)\,(p_\mu - (h+1)) = \left(p_\mu - \left(h + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$< \left(p_\mu - \left(h + \frac{1}{2}\right)\right)^2 < (p_n - p_1)^2$$

für $\mu = \alpha + 1, \cdots, n$ ist, erhalten wir

$$|P(h)\,P(h+1)| < 2^{-2\alpha}\,(p_n - p_1)^{2(n-\alpha)}$$

und daher

(41) $\quad |P(h)| < 2^{-\alpha}(p_n - p_1)^{n-\alpha}$ oder $|P(h+1)| < 2^{-\alpha}(p_n - p_1)^{n-\alpha}$.

Es ist jedenfalls

(42) $$2^{-\alpha}\,(p_n - p_1)^{n-\alpha} \leq M.$$

Denn für $p_n - p_1 = \frac{1}{2}$ hat man (vgl. Fussnote [1]) auf S. 23) $2^{-\alpha}\,(p_n - p_1)^{n-\alpha} = 2^{-\alpha-n+\alpha} = 2^{-n} = M$, für $p_n - p_1 < \frac{1}{2}$ (vgl. (39) und Fussnote [1]) auf S. 23) $2^{-\alpha}\,(p_n - p_1)^{n-\alpha} < 2^{-\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\alpha} = 2^{-\alpha-n+\alpha} = 2^{-n} = M$ und für $p_n - p_1 > \frac{1}{2}$ (vgl. (39) und Fussnote [1]) auf S. 23) $2^{-\alpha}\,(p_n - p_1)^{n-\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}(p_n - p_1)^{n-\alpha} \leq \frac{1}{2}\,(p_n - p_1)^{\alpha-1} \cdot (p_n - p_1)^{n-\alpha} = \frac{1}{2}\,(p_n - p_1)^{n-1} = M.$

Nach (40), (41) und (42) erhalten wir

$$|P(h)| < M \text{ oder } |P(h+1)| < M,$$

und Satz 11 ist mithin bewiesen.

Falls n speziell gleich 2 gewählt wird, ist a nach (39) gleich 1, und wir erhalten nach (40) und (41)

$$|P(h)| < \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \text{ oder } |P(h+1)| < \frac{1}{2}(p_2 - p_1).$$

Damit finden wir einen Remakschen Satz (vgl. (k), „Hilfssatz III") wieder, der wie folgt ausgesprochen werden kann:

Satz 12. *Wenn das Intervall $p_1, p_n =$ dem Intervall p_1, p_2 wenigstens eine ganze Zahl enthält, hat man $m < \frac{1}{2}(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}\sqrt{d}$, wo $d = (p_2 - p_1)^2$ die Diskriminante des Polynoms $P(x) = (x - p_1)(x - p_2)$ bezeichnet.*

Aus Satz 12 und denjenigen Sätzen, welche aus Satz 9 und Satz 10 hervorgehen, indem man speziell $n = 2$ wählt, folgt offenbar Satz 8. Es ist hierbei $|P(X)| = \max.\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\right)$ in dem speziellen Falle $p_1 = p_2 = X \pm \frac{1}{2}$, sonst aber hat man $|P(X)| < \max.\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\right)$.

13. In Satz 9 und Satz 10 ist die obere Grenze für m *genau*, denn in Satz 9 haben wir immer $m = 0$, in Satz 10 kann m in einem speziellen Fall den Wert 2^{-n} erreichen. Weder in Satz 11 noch in Satz 12 ist dies der Fall: es ist immer $m <$ (nie $=$) $M = \max.\left(2^{-n}, \frac{1}{2}(p_n - p_1)^{n-1}\right)$ bzw. $\frac{1}{2}(p_2 - p_1)$. Unter der in Satz 11 angegebenen Voraussetzung gelang es uns nicht, in dem allgemeinen Falle $n \geq 2$ eine genaue obere Grenze für m zu erhalten, wohl aber in dem speziellen Falle $n = 2$. Es gilt nämlich folgender[1])

[1]) In vielen Fällen hat man selbstverständlich $\frac{1}{2}N < \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$, und die neue obere Grenze für m ist schärfer als die früher erhaltene. In anderen Fällen ist aber $\frac{1}{2}N \geq \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$.

Satz 13. *Falls das Intervall* p_1, p_n = *dem Intervall* p_1, p_2 $N \geq 1$ *Stück ganze Zahlen enthält, ist* $m \leq \frac{1}{2} N$, *und für jede positive ganze Zahl* N *lassen sich die Zahlen* p_1 *und* p_2 *so wählen, dass die obere Grenze* $\frac{1}{2} N$ *erreicht wird.*

Der Voraussetzung gemäss gibt es eine ganze Zahl h, derart, dass

$$(43) \qquad h < p_1 < h + 1, \; h + N < p_2 < h + N + 1$$

(N = einer positiven ganzen Zahl) ist.

Wir setzen $x = x' + h$. Ganzen Zahlen x entsprechen dann ganze Zahlen x' und umgekehrt. Ferner geht das Polynom $P(x) = (x - p_1)(x - p_2)$ in das Polynom $P'(x') = (x' - (p_1 - h))(x' - (p_2 - h)) = (x' - p'_1)(x' - p'_2)$ über, wobei die Zahlen $p'_1 = p_1 - h$ und $p'_2 = p_2 - h$ nach (43) den Bedingungen $0 < p'_1 < 1$, $N < p'_2 < N + 1$ genügen. Ohne wesentliche Beschränkung dürfen wir daher $h = 0$ annehmen, so dass

$$0 < p_1 < 1, \; N < p_2 < N + 1$$

(N = einer positiven ganzen Zahl) ist.

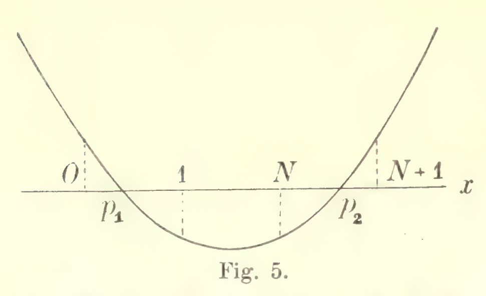


Fig. 5.

In der beistehenden Figur 5 wurde eine Parabel $y = (x - p_1)(x - p_2)$ angedeuteter Art gezeichnet; speziell wurde hierbei $N = 2$ gewählt.

Es leuchtet sofort ein, dass die Zahlen p_1 und p_2 für jede positive ganze Zahl N so bestimmt werden können, dass

$$(44) \qquad |P(0)| = |P(1)| = |P(N)| = |P(N + 1)|$$

wird.

Wählen wir nämlich p_1 und p_2 gleich den beiden Wurzeln der Gleichung

(45) $$x^2 - (N+1)x + \frac{1}{2}N = 0.$$

Wir haben dann

$|P(0)| = p_1 p_2 = \frac{1}{2}N$, $|P(1)| = (1-p_1)(p_2-1) = -1 + (p_1 + p_2) - p_1 p_2 = -1 + (N+1) - \frac{1}{2}N = \frac{1}{2}N$, $|P(N)| = (N-p_1)(p_2-N) = -N^2 + N(p_1+p_2) - p_1 p_2 = -N^2 + N(N+1) - \frac{1}{2}N = \frac{1}{2}N$, $|P(N+1)| = (N+1-p_1)(N+1-p_2) = (N+1)^2 - (N+1)(p_1+p_2) + p_1 p_2 = (N+1)^2 - (N+1)(N+1) + \frac{1}{2}N$

$$= \frac{1}{2}N,$$

und die Beziehungen (44) sind daher erfüllt.

Falls wir umgekehrt annehmen, dass die Beziehungen (44) erfüllt sind, folgt daraus, dass p_1 und p_2 die beiden Wurzeln der Gleichung (45) sind.

Für $N=1$ haben wir nach (44) $|P(0)| = |P(1)| = |P(2)|$. Die Beziehung $|P(0)| = |P(2)|$ gibt

$$p_1 p_2 = (2-p_1)(2-p_2) = 4 - 2p_1 - 2p_2 + p_1 p_2$$

und mithin

(46) $$p_2 = 2 - p_1.$$

Andererseits gibt die Beziehung $|P(0)| = |P(1)|$

$$p_1 p_2 = (p_2 - 1)(1-p_1) = p_2 - 1 - p_1 p_2 + p_1$$

d. h.

(47) $$p_2(1-2p_1) = 1 - p_1.$$

Nach (46) und (47) erhalten wir $(2-p_1)(1-2p_1) = 1 - p_1$, d. h. $2p_1^2 - 4p_1 + 1 = 0$, und p_1 ist mithin eine der beiden Wurzeln der Gleichung

(48) $$x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0.$$

Die Summe der beiden Wurzeln ist gleich 2, und nach (46) genügt also auch p_2 der Gleichung (48), welche aus der allgemeineren Gleichung (45) hervorgeht, indem N speziell gleich 1 gewählt wird.

Wir nehmen nunmehr an, dass $N \neq 1$ ist. Die Beziehung $|P(1)| = |P(N)|$ gibt

$$(1 - p_1)(p_2 - 1) = (N - p_1)(p_2 - N),$$

d. h.

$$p_2(N - 1) = (N^2 - 1) - p_1(N - 1) = (N - 1)(N + 1 - p_1)$$

und mithin für $N \neq 1$

(49) $$p_2 = N + 1 - p_1.$$

Andererseits gibt die Beziehung $|P(0)| = |P(1)|$ (vgl. (47))

$$p_2(1 - 2p_1) = 1 - p_1,$$

und wir erhalten also nach (49)

$$(N + 1 - p_1)(1 - 2p_1) = 1 - p_1,$$

woraus folgt, dass p_1 eine der beiden Wurzeln der Gleichung (45) ist. Die Summe der beiden Wurzeln ist gleich $N + 1$, und nach (49) genügt also auch p_2 derselben Gleichung (45).

Wir haben hiermit dargelegt, dass die Beziehungen (44) *dann und nur dann gelten, wenn die Zahlen p_1 und p_2 alle beide Wurzeln der Gleichung* (45) *sind; die Beträge* (44) *sind hierbei sämtlich gleich $\frac{1}{2}N$, und es ist $m = \frac{1}{2}N$.*

Dagegen hat man $m < \frac{1}{2}N$, sobald ein beliebiges von dem betreffenden Polynom $P(x) = (x - p_1)(x - p_2)$ verschiedenes Polynom $P'(x) = (x - p'_1)(x - p'_2)$ mit $0 < p'_1 < 1, N < p'_2 < N + 1$ betrachtet wird; zum Beweise haben wir mehrere Fälle zu unterscheiden.

1:o $p'_2 - p'_1 = p_2 - p_1$.

Die Parabel $y = P'(x)$ geht aus der Parabel $y = P(x)$ (vgl. Fig. 5) hervor, indem man diese a) nach links oder b) nach rechts verschiebt.

Es ist im Falle a) $|P'(0)| < |P(0)| = \frac{1}{2}N$, im Falle b) $|P'(N+1)| < |P(N+1)| = \frac{1}{2}N$.

2:o $p_2' - p_1' < p_2 - p_1$.

Die Parabel $y = P'(x)$ geht aus der Parabel $y = P(x)$ hervor, indem man diese a) teils aufwärts, teils nach links oder b) teils aufwärts, teils nach rechts oder c) nur aufwärts verschiebt.

Es ist im Falle a) $|P'(N)| < |P(N)| = \frac{1}{2}N$, im Falle b) $|P'(1)| < |P(1)| = \frac{1}{2}N$, im Falle c) $|P'(1)| < |P(1)| = \frac{1}{2}N$ und $|P'(N)| < |P(N)| = \frac{1}{2}N$.

3:o $p_2' - p_1' > p_2 - p_1$.

Die Parabel $y = P'(x)$ geht aus der Parabel $y = P(x)$ hervor, indem man diese a) teils abwärts, teils nach rechts oder b) teils abwärts, teils nach links oder c) nur abwärts verschiebt.

Es ist im Falle a) $|P'(N+1)| < |P(N+1)| = \frac{1}{2}N$, im Falle b) $|P'(0)| < |P(0)| = \frac{1}{2}N$, im Falle c) $|P'(0)| < |P(0)| = \frac{1}{2}N$ und $|P'(N+1)| < |P(N+1)| = \frac{1}{2}N$.

Wir haben also $m < \frac{1}{2}N$, sobald die Parabel $y = P'(x)$ mit der Parabel $y = P(x)$ nicht identisch ist, und Satz 13 ist damit vollständig bewiesen.

§ 4. Nichthomogene lineare Formen.

A. Analytische Untersuchungen.

14. Später in diesem Paragraphen (vgl. Nr 16) wollen wir die Sätze 1, 6 und 8 zur Anwendung bringen. Anfangs sind aber unsere Untersuchungen von den obigen unabhängig.

Wir betrachten das Formensystem

(50) $l_\nu(x_1, \cdots, x_\nu) = a_{\nu,1} x_1 + \cdots + a_{\nu,\nu} x_\nu - c_\nu \; (\nu = 1, 2, \cdots, n).$

Die Zahlen a und c seien sämtlich reell, und speziell mögen wir

(51) $$\prod_{\nu=1}^{n} |a_{\nu,\nu}| = D > 0$$

haben, so dass

(52) $$a_{\nu,\nu} \neq 0$$

ist.

Weil die Determinante des Formensystems (50) nach (51) von Null verschieden ist, erhalten wir unmittelbar ein Ergebnis, welches sich am besten geometrisch formulieren lässt: die n Ebenen $l_\nu(x_1, \cdots, x_\nu) = 0$ schneiden einander in einem wohldefinierten Punkt $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ des n-dimensionalen $(x_1, \cdots, x_n)$-Raumes, und wir haben für $\nu = 1, 2, \cdots, n$

(53) $l_\nu(x_1, \cdots, x_\nu) = a_{\nu,1}(x_1 - \xi_1) + \cdots + a_{\nu,\nu}(x_\nu - \xi_\nu).$

Nunmehr können wir ohne Mühe den Satz beweisen:

Satz 14. *Es gibt wenigstens ein ganzzahliges Wertsystem $X_1, \cdots, X_n$, derart, dass*

$$\prod_{\nu=1}^{n} |l_\nu(X_1, \cdots, X_\nu)| \leq 2^{-n} D$$

ist.

Die erste Form des Systems (50) lässt sich nach (53) in der Form

$$l_1(x_1) = a_{1,1} x_1 - c_1 = a_{1,1}(x_1 - \xi_1)$$

schreiben, und wir haben daher nach (52)

$$\left| \frac{l_1(x_1)}{a_{1,1}} \right| = |x_1 - \xi_1|.$$

Wir wählen $x_1 =$ einer ganzen Zahl X_1, derart, dass $|X_1 - \xi_1| \leq \frac{1}{2}$ wird und erhalten mithin

(54) $$\left| \frac{l_1(X_1)}{a_{1,1}} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Ferner betrachten wir die zweite Form des Systems (50) und haben nach (53)

$$l_2(X_1, x_2) = a_{2,1} X_1 + a_{2,2} x_2 - c_2 = a_{2,1}(X_1 - \xi_1) + a_{2,2}(x_2 - \xi_2)$$

und daher nach (52)

$$\left|\frac{l_2(X_1, x_2)}{a_{2,2}}\right| = \left|x_2 - \left\{\xi_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}(X_1 - \xi_1)\right\}\right| = \left|x_2 - \{\cdots\}_1\right|.$$

Wir wählen $x_2 =$ einer ganzen Zahl X_2, derart, dass $|X_2 - \{\cdots\}_1| \leqq \frac{1}{2}$ wird und erhalten mithin

(54)′ $$\left|\frac{l_2(X_1, X_2)}{a_{2,2}}\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

Auf ganz analoge Weise geht hervor, dass wir für x_3 eine ganze Zahl X_3 derart wählen können, dass

(54)″ $$\left|\frac{l_3(X_1, X_2, X_3)}{a_{3,3}}\right| < \frac{1}{2}$$

wird, u.s.w. Für x_n können wir endlich eine ganze Zahl X_n derart wählen, dass

(54)$^{(n-1)}$ $$\left|\frac{l_n(X_1, \cdots, X_n)}{a_{n,n}}\right| < \frac{1}{2}$$

wird.

Indem wir die n Beziehungen (54), (54)′, $\cdots$, (54)$^{(n-1)}$ multiplizieren, erhalten wir nach (51)

$$\prod_{\nu=1}^{n} |l_\nu(X_1, \cdots, X_\nu)| \leqq 2^{-n} \prod_{\nu=1}^{n} a_{\nu,\nu} = 2^{-n} D,$$

und Satz 14 ist damit bewiesen.

15. Wir betrachten nunmehr ein nichthomogenes Formensystem von ganz anderer Art als das System (50) in Nr 14, nämlich

(55) $$l_\nu(x_1, \cdots, x_n) = a_{\nu,1} x_1 + \cdots + a_{\nu,n} x_n - c_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Die Konstanten c mögen hierbei beliebige reelle Zahlen sein, *von den Koeffizienten a aber nehmen wir an, dass sie r a t i o n a l*

sind; es sei ferner der Betrag der Determinante $|a_{\nu,\mu}|$ von Null verschieden:

$$\text{abs.}\ |a_{\nu,\mu}| = D > 0. \tag{56}$$

Unter Benutzung des Satzes 14 können wir dann den Satz beweisen:

Satz 15. *Es gibt wenigstens ein ganzzahliges Wertsystem* $X_1, \cdots, X_n$, *derart, dass*

$$\prod_{\nu=1}^{n} |l_\nu(X_1, \cdots, X_n)| \leq 2^{-n} D$$

ist.

Anfangs konstatieren wir:

1:o Falls α und β zwei beliebige von den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ sind, lassen sich in dem Formensystem (55) die Rollen von $a_{\nu,\alpha}$ und $a_{\nu,\beta}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ vertauschen; man kann nämlich x_α statt x_β und x_β statt x_α schreiben.

2:o Die Substitution

$$x_\alpha = y_\alpha + h\, y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n; \alpha \neq \beta)$$
$$x_\nu = y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \alpha - 1, \alpha + 1, \cdots, n)$$

führt das Formensystem (55) in das System

$$l'_\nu(y_1, \cdots, y_n) = a_{\nu,1}\, y_1 + \cdots + a_{\nu,\beta-1}\, y_{\beta-1} + (a_{\nu,\beta} + h\, a_{\nu,\alpha})\, y_\beta$$
$$+ a_{\nu,\beta+1}\, y_{\beta+1} + \cdots + a_{\nu,n}\, y_n - c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

über, und die Determinante dieses Systems ist ihrem Betrage nach gleich D. Falls h speziell gleich einer ganzen Zahl gewählt wird, entsprechen hierbei ganzen Zahlen y ganze Zahlen x und umgekehrt, denn die Determinante der Substitution ist ihrem Betrage nach gleich 1.

Wir gehen nun von dem Formensystem (55) aus. Die Koeffizienten a der betrachteten Formen sind unserer Annahme gemäss rational, und wir können daher die n Koeffizienten der Form l_ν sämtlich unter denselben Nenner

$$N_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{57}$$

bringen. Wir erhalten dann

(58) $$F_\nu(x_1, \cdots, x_n) = N_\nu l_\nu(x_1, \cdots, x_n) = A_{\nu,1} x_1 + \cdots \\ \cdots + A_{\nu,n} x_n - N_\nu c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei die Koeffizienten $A_{\nu,\mu}$ $(\nu, \mu = 1, 2, \cdots, n)$ *ganz*zahlig sind, und die Determinante $|A_{\nu,\mu}|$ des neuen Formensystems ist ihrem Betrage nach $N_1 N_2 \cdots N_n$-mal grösser als der Betrag D der Determinante $|a_{\nu,\mu}|$:

(59) $$\text{abs.}\,|A_{\nu,\mu}| = N_1 N_2 \cdots N_n D.$$

Aus dem unter den Momenten 1:o und 2:o Gesagten geht sukzessive hervor, dass wir schreiben mögen:

(60) $$\begin{aligned} F_1(x_1, \cdots, x_n) &= G_1(y_1) &&= B_{1,1} y_1 - N_1 c_1 \\ F_\nu(x_1, \cdots, x_n) &= G_\nu(y_1, \cdots, y_n) &&= B_{\nu,1} y_1 + \cdots + B_{\nu,n} y_n - N_\nu c_\nu \\ &&& (\nu = 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

(61) $$\begin{aligned} F_1(x_1, \cdots, x_n) &= H_1(z_1) &&= C_{1,1} z_1 - N_1 c_1 \\ F_2(x_1, \cdots, x_n) &= H_2(z_1, z_2) &&= C_{2,1} z_1 + C_{2,2} z_2 - N_2 c_2 \\ F_\nu(x_1, \cdots, x_n) &= H_\nu(z_1, \cdots, z_n) &&= C_{\nu,1} z_1 + \cdots + C_{\nu,n} z_n - N_\nu c_\nu \\ &&& (\nu = 3, \cdots, n) \end{aligned}$$

. . . .

(62) $$F_\nu(x_1, \cdots, x_n) = L_\nu(v_1, \cdots, v_\nu) = E_{\nu,1} v_1 + \cdots + E_{\nu,\nu} v_\nu - N_\nu c_\nu \\ (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Hierbei sind die Koeffizienten $B, C, \cdots, E$ *ganz*zahlig, und die Beträge der Determinanten der Formensysteme (60), (61), $\cdots$, (62) sind sämtlich $= N_1 N_2 \cdots N_n D > 0$; ferner entsprechen ganzen Zahlen x ganze Zahlen $y, z, \cdots, v$ und umgekehrt.

Wir können nämlich wie folgt räsonnieren:

Nach 1:o dürfen wir ohne wesentliche Beschränkung

(63) $$|A_{1,1}| \geqq |A_{1,2}| \geqq \cdots \geqq |A_{1,n}|$$

annehmen und nach (59), (57) und (56) wissen wir, dass wenigstens einer von den Beträgen (63) von Null verschieden ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

α) $|A_{1,1}| > 0,\ |A_{1,2}| = \cdots = |A_{1,n}| = 0;$

das Formensystem (58) hat dann den verlangten Charakter (60);

β) $|A_{1,1}| \geqq \cdots \geqq |A_{1,\gamma}| > 0;\ |A_{1,\gamma+1}| = \cdots = |A_{1,n}| = 0,\ \gamma \geqq 2.$

Mittels Substitutionen, in denen die Koeffizienten ganzzahlig sind und die Determinanten ihren Beträgen nach gleich 1 sind, können wir nach 2:o das Formensystem (58) sukzessive in neue Systeme desselben Charakters überführen — nur nehmen die Beträge derjenigen Koeffizienten, welche den Koeffizienten $A_{1,\gamma-1}$ und $A_{1,\gamma}$ entsprechen, nach und nach ab, indem jedes zweite Mal jener, jedes zweite Mal dieser von den genannten Koeffizienten ihrem Betrage nach verkleinert wird. Schliesslich verschwindet dieser oder jener Koeffizient, und nach 1:o dürfen wir mithin

$$F_1(x_1, \cdots, x_n) = A'_{1,1} x'_1 + \cdots + A'_{1,\gamma-1} x_{\gamma-1} - N_1 c_1$$

schreiben; die Formen $F_2, \cdots, F_n$ des Systems (58) bleiben ihrem Charakter nach unverändert.

Auf ganz analoge Weise erhalten wir ferner

$$F_1(x_1, \cdots, x_n) = A''_{1,1} x''_1 + \cdots + A''_{1,\gamma-2} x''_{\gamma-2} - N_1 c_1,$$

während die Formen $F_2, \cdots, F_n$ des Systems (58) ihrem Charakter nach unverändert bleiben, u.s.w. Schliesslich bekommt also das Formensystem (58) den verlangten Charakter (60).

Weil die Determinante des Formensystems (60), d. h.

$$B_{1,1} \begin{vmatrix} B_{2,2} & \cdots & B_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n,2} & \cdots & B_{n,n} \end{vmatrix} = N_1 \cdots N_n D,$$

von Null verschieden ist, verschwinden die Koeffizienten $B_{2,2}, \cdots, B_{2,n}$ nicht sämtlich. Auf ganz dieselbe Weise wie das Formensystem (58) oben das Formensystem (60) gab, erhalten wir nun sukzessive das Formensystem (61) aus dem Formensystem (60). Die Koeffizienten mit den Indizes $2, \nu$ $(\nu = 2, \cdots, n)$ spielen hierbei dieselbe Rolle wie oben die Koeffizienten mit den Indizes $1, \nu$ $(\nu = 1, \cdots, n)$. Die erste Form bleibt nun unverändert, weil die Koeffizienten derselben — den ersten ausgenommen — gleich Null sind.

Der Beweis geht auf ganz analoge Weise weiter, und schliesslich erhält das Formensystem (58) den verlangten Charakter (62).

Auf das Formensystem $L_\nu(v_1, \cdots, v_\nu)$ (vgl. (62)) lässt sich Satz 14 in Anwendung bringen. Das System ist nämlich von dem Charakter (50), und der Betrag seiner Determinante

$$\prod_{\nu=1}^{n} |E_{\nu,\nu}| = N_1 \cdots N_n D$$

ist positiv, so dass $E_{\nu,\nu} \neq 0$ ist. Es gibt mithin ein ganzzahliges Wertsystem $V_1, \cdots, V_n$, derart, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n} |L_\nu(V_1, \cdots, V_\nu)| \leqq N_1 \cdots N_n D\, 2^{-n}$$

ist. Nach (62) gibt es dann auch ein ganzzahliges Wertsystem $X_1, \cdots, X_n$, derart, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n} |F_\nu(X_1, \cdots, X_n)| \leqq N_1 \cdots N_n D\, 2^{-n}$$

ist, und nach (58) erhalten wir also

$$N_1 \cdots N_n \prod_{\nu=1}^{n} |l_\nu(X_1, \cdots, X_n)| \leqq N_1 \cdots N_n D\, 2^{-n},$$

d. h.

$$\prod_{\nu=1}^{n} |l_\nu(X_1, \cdots, X_n)| \leqq 2^{-n} D.$$

Satz 15 ist damit bewiesen.

16. Wir fragen nunmehr: gilt Satz 15 auch, falls die Koeffizienten a beliebige reelle, nicht notwendig rationale Zahlen sind?

Für $n = 1$ ist die Frage nach Satz 14 zu bejahen, desgleichen im Falle $n = 2$. Mit Hilfe der in den Paragraphen 2 und 3 hergeleiteten Sätze 1, 6 und 8 wollen wir im Anschluss an Remak (k) und Mordell (f) zeigen, dass dem so ist. Wir wollen m. a. W. den folgenden Satz, der von Minkowski ((e) und (c)) stammt, beweisen:

Satz 16. Wenn die Koeffizienten a und die Konstanten c der Formen

$$(64)\qquad \begin{aligned} l_1(x_1, x_2) &= a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 - c_1 \\ l_2(x_1, x_2) &= a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 - c_2 \end{aligned}$$

reelle Zahlen sind, welche der Bedingung

$$(65)\qquad \text{abs.}\,|a_{\nu,\mu}| = D > 0 \qquad (\nu, \mu = 1, 2)$$

genügen, gibt es wenigstens ein ganzzahliges Wertpaar X_1, X_2, derart, dass

$$(66)\qquad |l_1(X_1, X_2)\, l_2(X_1, X_2)| \leq 2^{-2} D$$

ist.

In die Formen (64) substituieren wir

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1\, y_1 + X_1'\, y_2 \qquad & (X_1, X_2, X_1', X_2' &= \text{ganzen Zahlen}; \\ x_2 &= X_2\, y_1 + X_2'\, y_2 & X_1 X_2' - X_2 X_1' &= 1). \end{aligned}$$

Ganzen Zahlen y_1, y_2 entsprechen ganze Zahlen x_1, x_2 und umgekehrt. Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2) = l_1'(y_1, y_2) &= (a_{1,1} X_1 + a_{1,2} X_2)\, y_1 + (a_{1,1} X_1' + a_{1,2} X_2')\, y_2 - c_1 \\ &= b_{1,1}\, y_1 + b_{1,2}\, y_2 - c_1, \\ l_2(x_1, x_2) = l_2'(y_1, y_2) &= (a_{2,1} X_1 + a_{2,2} X_2)\, y_1 + (a_{2,1} X_1' + a_{2,2} X_2')\, y_2 - c_2 \\ &= b_{2,1}\, y_1 + b_{2,2}\, y_2 - c_2, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} X_1 + a_{1,2} X_2 & a_{1,1} X_1' + a_{1,2} X_2' \\ a_{2,1} X_1 + a_{2,2} X_2 & a_{2,1} X_1' + a_{2,2} X_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix}$$

$$= \pm D \cdot 1 = \pm D$$

und mithin

$$\text{abs.}\,|b_{\nu,\mu}| = D \qquad (\nu, \mu = 1, 2)$$

ist.

Nach Satz 1 für $n = 2$ und nach der ergänzenden Bemerkung in Nr 7 lassen sich die Zahlen X_1' und X_2' speziell so wählen [1]), dass

[1]) Es müssen die Zahlen X_1' und X_2' relativ prim sein, weil $X_1 X_2' - X_2 X_1' = 1$ ist. Satz 1 für $n = 2$ lässt sich dennoch in Anwendung bringen, denn die Koordinaten der Gitterpunkte $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ (vgl. Satz 1 für $n = 2$) sind ebenfalls relativ prim.

$$|b_{1,2}| = |a_{1,1} X'_1 + a_{1,2} X'_2| \leq \sqrt{D}, \quad |b_{2,2}| = |a_{2,1} X'_1 + a_{2,2} X'_2| \leq \sqrt{D}$$

wird, und wir erhalten dann $|b_{1,2}\, b_{2,2}| \leq D$. Daher dürfen wir ohne wesentliche Beschränkung

(67) $$|a_{1,2}\, a_{2,2}| \leq D$$

annehmen.

Falls $a_{1,2}\, a_{2,2} = 0$ ist, hat das Formensystem (64) den Charakter (50), und Satz 14 für $n = 2$ lässt sich anwenden. Die Richtigkeit des Satzes 16 ist damit für den genannten Fall dargelegt, und im Folgenden dürfen wir also

(68) $$|a_{1,2}\, a_{2,2}| > 0$$

annehmen.

Wir schreiben

(69) $$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2) &= a_{1,1}(x_1 - \xi_1) + a_{1,2}(x_2 - \xi_2) \\ l_2(x_1, x_2) &= a_{2,1}(x_1 - \xi_1) + a_{2,2}(x_2 - \xi_2) \end{aligned}$$

(vgl. (53); es ist selbstverständlich (ξ_1, ξ_2) der Schnittpunkt der Geraden $l_1(x_1, x_2) = 0$ und $l_2(x_1, x_2) = 0$).

Ferner wählen wir $x_1 =$ einer ganzen Zahl X_1, derart, dass

(70) $$|X_1 - \xi_1| < \frac{1}{2}$$

wird und setzen

(71) $$\alpha = \xi_1 - X_1.$$

Dann haben wir (vgl. (68))

$$l_1(X_1, x_2) = a_{1,2}\, x_2 - (a_{1,2}\, \xi_2 + a_{1,1}\, \alpha) = a_{1,2}\, x_2 - A_1 = a_{1,2}\left(x_2 - \frac{A_1}{a_{1,2}}\right)$$

$$l_2(X_1, x_2) = a_{2,2}\, x_2 - (a_{2,2}\, \xi_2 + a_{2,1}\, \alpha) = a_{2,2}\, x_2 - A_2 = a_{2,2}\left(x_2 - \frac{A_2}{a_{2,2}}\right)$$

mit

(72) $$A_1 = a_{1,2}\, \xi_2 + a_{1,1}\, \alpha, \qquad A_2 = a_{2,2}\, \xi_2 + a_{2,1}\, \alpha,$$

und wir erhalten also

$$\left|\frac{l_1(X_1, x_2)\, l_2(X_1, x_2)}{a_{1,2}\, a_{2,2}}\right| = \left|\left(x_2 - \frac{A_1}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 - \frac{A_2}{a_{2,2}}\right)\right|.$$

Nach Satz 8 lässt sich $x_2 =$ einer ganzen Zahl X_2 derart bestimmen, dass das rechte Glied $\leq$

$$\max.\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\left|\frac{A_1}{a_{1,2}} - \frac{A_2}{a_{2,2}}\right|\right)$$

wird. Es ist aber nach (72), (71), (70) und (65)

$$\frac{1}{2}\left|\frac{A_1}{a_{1,2}} - \frac{A_2}{a_{2,2}}\right| = \frac{1}{2\,|a_{1,2}a_{2,2}|} \cdot \text{abs.}\begin{vmatrix} A_1 & a_{1,2} \\ A_2 & a_{2,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\,|a_{1,2}a_{2,2}|} \cdot$$

$$\text{abs.}\begin{vmatrix} a_{1,2}\,\xi_2 + a_{1,1}\,a & a_{1,2} \\ a_{2,2}\,\xi_2 + a_{2,1}\,a & a_{2,2} \end{vmatrix} = \frac{|a|\,D}{2\,|a_{1,2}\,a_{2,2}|} \leq \frac{D}{4\,|a_{1,2}\,a_{2,2}|},$$

und wir haben daher

$$|l_1(X_1, X_2)\,l_2(X_1, X_2)| \leq |a_{1,2}\,a_{2,2}|\,\max.\left(\frac{1}{4}, \frac{D}{4\,|a_{1,2}\,a_{2,2}|}\right)$$

$$= \max.\left(\frac{|a_{1,2}\,a_{2,2}|}{4}, \frac{D}{4}\right).$$

Diese obere Grenze hat nach (67) den Wert $2^{-2}D$ und es gibt also ein ganzzahliges Wertpaar X_1, X_2, derart, dass die Beziehung (66) gilt, w. z. b. w.

Der obige Beweis des Satzes 16 ist mit dem REMAKschen nahe verwandt; im Anschluss an MORDELL lässt sich der Beweis wie folgt führen.

Bis zur Beziehung (71) räsonnieren wir wie oben. Wir haben

$$l_1(X_1, x_2)\,l_2(X_1, x_2) = a_{1,2}\,a_{2,2}\left\{(x_2 - \xi_2) - \frac{a_{1,1}}{a_{1,2}}\,a\right\}\left\{(x_2 - \xi_2) - \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}\,a\right\},$$

und indem wir

$$y = \left\{(x_2 - \xi_2) - \frac{a_{1,1}}{a_{1,2}}\,a\right\} \tag{73}$$

setzen, erhalten wir nach (65)

$$\left\{(x_2 - \xi_2) - \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}\,a\right\} = y - \left(\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} - \frac{a_{1,1}}{a_{1,2}}\right)a = y \pm \frac{D\,a}{a_{1,2}\,a_{2,2}},$$

d. h.

$$l_1(X_1, x_2)\,l_2(X_1, x_2) = a_{1,2}\,a_{2,2}\,y^2 \pm D\,a\,y = D\left(\frac{a_{1,2}\,a_{2,2}}{D}\,y^2 \pm a\,y\right).$$

Es ist nach (67) und (68) $0 < \left|\frac{a_{1,2}\, a_{2,2}}{D}\right| \leqq 1$ und nach (70) und (71) $|a| \leqq \frac{1}{2}$. Nach Satz 6 gibt es also ein Intervall y, dessen Länge wenigstens $= 1$ ist, derart, dass, falls y ein beliebiger Wert des Intervalles ist, so hat man

$$\left|\frac{a_{1,2}\, a_{2,2}}{D} y^2 \pm a\, y\right| \leqq \frac{1}{4}.$$

In dem genannten Intervall wählen wir y derart, dass der entsprechende Wert $x_2 = X_2$ (vgl. (73)) *ganz*zahlig ist, und wir erhalten dann die verlangte Beziehung (66).

17. Wir gehen nun zum Falle $n = 3$ über und betrachten das Formensystem

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2, x_3) &= a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + a_{1,3}\, x_3 - c_1 \\ l_2(x_1, x_2, x_3) &= a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + a_{2,3}\, x_3 - c_2 \\ l_3(x_1, x_2, x_3) &= a_{3,1}\, x_1 + a_{3,2}\, x_2 + a_{3,3}\, x_3 - c_3 ; \end{aligned}$$

es seien hierbei die Koeffizienten a und die Konstanten c beliebige reelle Zahlen, und es sei ferner die Determinante des Formensystems ihrem Betrage nach $= D > 0$:

$$\text{abs.}\, |a_{\nu,\mu}| = D > 0 \qquad (\nu, \mu = 1, 2, 3).$$

Dem Satz 14 zufolge gibt es, falls $a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3} = 0$ ist, ein ganzzahliges Wertsystem X_1, X_2, X_3, derart, dass

$$|l_1(X_1)\; l_2(X_1, X_2)\; l_3(X_1, X_2, X_3)| < 2^{-3} D$$

ist.

Wir zeigen nunmehr: ein analoges Ergebnis stellt sich heraus für

1:o $a_{1,2} = a_{1,3} = 0$, $a_{2,3} \neq 0$,

2:o $a_{1,3} = a_{2,3} = 0$, $a_{1,2} \neq 0$.

Im Falle 1:o haben wir (vgl. (53))

$$\begin{aligned} l_1(x_1) &= a_{1,1}(x_1 - \xi_1) \\ l_2(x_1, x_2, x_3) &= a_{2,1}(x_1 - \xi_1) + a_{2,2}(x_2 - \xi_2) + a_{2,3}(x_3 - \xi_3) \\ l_3(x_1, x_2, x_3) &= a_{3,1}(x_1 - \xi_1) + a_{3,2}(x_2 - \xi_2) + a_{3,3}(x_3 - \xi_3). \end{aligned}$$

Es ist hierbei

$$\text{abs.}\left(a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}\right) = D > 0$$

und mithin

(74) $$a_{1,1} \neq 0.$$

Wir wählen x_1 = einer ganzen Zahl X_1, derart, dass $|X_1 - \xi_1| \leqq \frac{1}{2}$ wird und erhalten nach (74)

(75) $$\left|\frac{l_1(X_1)}{a_{1,1}}\right| \leqq 2^{-1}.$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} a_{1,1}\, l_2(X_1, x_2, x_3) &= a_{1,1}\, a_{2,2}\, x_2 + a_{1,1}\, a_{2,3}\, x_3 + a_{1,1}\,(a_{2,1} X_1 - c_2) \\ l_3(X_1, x_2, x_3) &= a_{3,2}\, x_2 + a_{3,3}\, x_3 + a_{3,1}\, X_1 - c_3 \end{aligned}$$

mit

$$\text{abs.}\begin{vmatrix} a_{1,1}\, a_{2,2} & a_{1,1}\, a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \text{abs.}\left(a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}\right) = D > 0.$$

Nach Satz 16 lassen sich dann x_2 = einer ganzen Zahl X_2 und x_3 = einer ganzen Zahl X_3 so bestimmen, dass

(76) $$|a_{1,1}\, l_2(X_1, X_2, X_3)\, l_3(X_1, X_2, X_3)| \leqq 2^{-2} D$$

wird, und wir erhalten mithin nach (75) und (76)

$$|l_1(X_1)\, l_2(X_1, X_2, X_3)\, l_3(X_1, X_2, X_3)| \leqq 2^{-3} D,$$

d. h. die verlangte Beziehung.

Im Falle 2:o haben wir (vgl. (53))

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2) &= a_{1,1}(x_1 - \xi_1) + a_{1,2}(x_2 - \xi_2) \\ l_2(x_1, x_2) &= a_{2,1}(x_1 - \xi_1) + a_{2,2}(x_2 - \xi_2) \\ l_3(x_1, x_2, x_3) &= a_{3,1}(x_1 - \xi_1) + a_{3,2}(x_2 - \xi_2) + a_{3,3}(x_3 - \xi_3) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{3,3}\, l_1(x_1, x_2) &= a_{3,3}\, a_{1,1}\, x_1 + a_{3,3}\, a_{1,2}\, x_2 - a_{3,3}\, c_1 \\ l_2(x_1, x_2) &= a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 - c_2; \end{aligned}$$

es ist hierbei

$$(77)\quad \text{abs.}\begin{vmatrix} a_{3,3}\,a_{1,1} & a_{3,3}\,a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \text{abs.}\left(a_{3,3}\begin{vmatrix} a_{1,1}\,a_{1,2} \\ a_{2,1}\,a_{2,2} \end{vmatrix}\right) = D > 0.$$

Dem Satze 16 zufolge lassen sich also x_1 = einer ganzen Zahl X_1 und x_2 = einer ganzen Zahl X_2 so bestimmen, dass

$$(78)\qquad |a_{3,3}\, l_1(X_1, X_2)\, l_2(X_1, X_2)| \leqq 2^{-2} D$$

wird. Ferner haben wir, weil $a_{3,3}$ nach (77) $\neq 0$ ist,

$$\left|\frac{l_3(X_1, X_2, x_3)}{a_{3,3}}\right| = \left|x_3 + \frac{1}{a_{3,3}}(a_{3,1} X_1 + a_{3,2} X_2 - c_3)\right|,$$

und es lässt sich daher x_3 = einer ganzen Zahl X_3 so wählen, dass

$$(79)\qquad \left|\frac{l_3(X_1, X_2, X_3)}{a_{3,3}}\right| \leqq 2^{-1}$$

wird. Wir erhalten dann nach (78) und (79)

$$|l_1(X_1, X_2)\, l_2(X_1, X_2)\, l_3(X_1, X_2, X_3)| \leqq 2^{-3} D,$$

d. h. die verlangte Beziehung.

B. Geometrische Untersuchungen.

18. Mehrere Bezeichnungen, welche wir unten benutzen, mögen erst zusammengestellt werden.

1:o O; K, J; K_1, F_1, P_1; K_2, F_2, P_2: vgl. Nr 1; nunmehr wird speziell $n = 2$ angenommen.

2:o $J = J_x$: vgl. Nr 4; die Formel bringt zum Ausdruck, dass (x_1, x_2)-Koordinaten bei der Quadratur angewandt werden.

3:o P, P' : „entgegengesetzte" Punkte, die in bezug auf O symmetrisch liegen.

4:o K_3 geht aus K mittels Dilatation im Verhältnis F_3 hervor; F_3 wird so gewählt, dass K_3 eventuelle von O verschiedene innere Gitterpunkte nur auf den Geraden OP_1 und OP_2 enthält, während auf die Begrenzung der Figur wenigstens ein Gitterpunkt

P_3 fällt, der weder der Geraden OP_1 noch der Geraden OP_2 angehört. (In Nr 1 brauchten wir im Falle $n = 2$ die Bezeichnungen K_3, F_3, P_3 gar nicht.)

5:o $\left[\frac{1}{2}\right] K$ (bzw. $[2]\,K$) stellt sich heraus, indem K im Verhältnis 1 : 2 (bzw. 2 : 1) dilatiert wird.

6:o $K(x_1, x_2)$ geht hervor, indem $K = K(0, 0)$ parallel mit sich selbst zu dem Punkt (x_1, x_2) als Mittelpunkt verschoben wird.

Bei der Wahl des Punktes P_1 kommen wenigstens zwei (entgegengesetzte) Punkte in Betracht. Unter den zulässigen Punkten

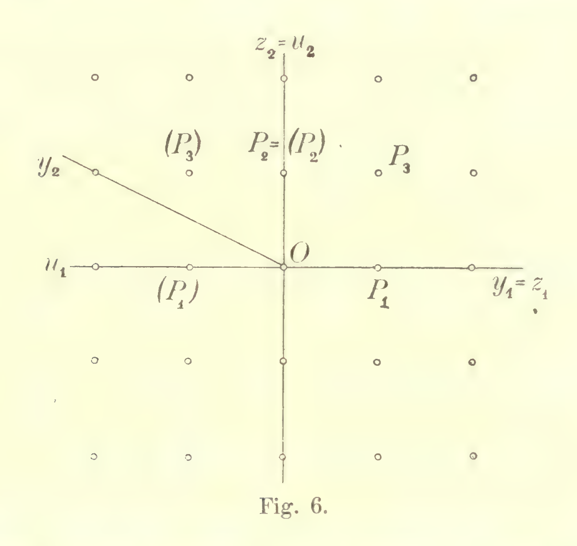


Fig. 6.

wählen wir P_1 ganz beliebig. Das gegebene Gitter (x_1, x_2) wird durch ein Gitter (y_1, y_2) ersetzt, das mit dem Gitter (x_1, x_2) äquivalent ist, und für welches (vgl. Fig. 6)

$$P_1 = (y_1, y_2) = (1, 0)$$

ist. Ein derartiges Gitter gibt es gewiss (vgl. Nr 2).

Bei der Wahl des Punktes $P_2 = (y_1, y_2)$ ist $y_2 = 0$ ausgeschlossen, weil P_2 der Geraden OP_1 nicht angehört. Wir können dann $y_2 \geqq 1$ wählen. Die Möglichkeit $y_2 > 2$ kommt nicht in Betracht, denn diesfalls würde das Dreieck $P_1\,P_2\,P_1'$ — und daher auch K_2 — von der Geraden $y_2 = 1$ eine Strecke $l > 1$ enthalten. Es würde

mithin einen inneren Gitterpunkt von K_2 geben, dessen y_2-Koordinate $= 1$ wäre, was nach der Definition der Figur K_2 ausgeschlossen ist. Für $y_2 = 2$ erhalten wir auf dieselbe Weise einen Widerspruch, den speziellen Fall ausgenommen, wo die genannte Strecke $l = 1$ ist und die beiden Endpunkte derselben Gitterpunkte sind, welche auf die Begrenzung der Figur K_2 fallen. Ein beliebiger von diesen Endpunkten lässt sich dann als Punkt P_2 wählen. Wir dürfen daher annehmen, dass die y_2-Koordinate des Punktes P_2 gleich 1 ist, und es gibt also ein mit dem Gitter (y_1, y_2) äquivalentes Gitter (z_1, z_2), für welches

$$P_1 = (z_1, z_2) = (1, 0), \quad P_2 = (z_1, z_2) = (0, 1)$$

ist.

Bei der Wahl des Punktes $P_3 = (z_1, z_2)$ ist $z_2 = 0$ ausgeschlossen, weil P_3 der Geraden OP_1 nicht angehört. Wir können dann $z_2 \geqq 1$ wählen. Ebenfalls ist die Möglichkeit $z_1 = 0$ ausgeschlossen, weil P_3 der Geraden OP_2 nicht angehört. Wir können dann

$$\text{a) } z_1 \geqq 1 \quad \text{oder} \quad \text{b) } z_1 \leqq -1$$

wählen.

Im Falle a) lässt sich offenbar $P_3 = (z_1, z_2) = (1, 1)$ wählen. Denn mit $P_3 = (z_1, z_2)$ $(z_1 \geqq 1, z_2 \geqq 1)$ und $P_1 = (1, 0)$ gehört $P = (a, 1) \left(a = 1 + \frac{z_1 - 1}{z_2} \geqq 1\right)$ der Figur K_3, und mit P und $P_2 = (0, 1)$ gehört $(1, 1)$ dieser Figur an. Der Punkt $(1, 1)$ ist kein innerer Punkt von K_3 und daher ein Grenzpunkt. Es lässt sich also $P_3 = (z_1, z_2) = (1, 1)$ wählen. Auf ganz analoge Weise geht hervor, dass wir im Falle b) $P_3 = (z_1, z_2) = (-1, 1)$ wählen können.

Im Falle a) ist das Parallelogramm $OP_1P_3P_2$ das Fundamentalparallelogramm $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ des Gitters (z_1, z_2). Im Falle b) wählen wir $(P_1) = (z_1, z_2) = (-1, 0)$, $(P_3) = (z_1, z_2) = (-1, 1)$, $(P_2) = (z_1, z_2) = (0, 1)$, und das Parallelogramm $O(P_1)(P_3)(P_2)$ ist das Fundamentalparallelogramm des mit dem Gitter (z_1, z_2) äquivalenten Gitters $u_1 = -z_1$, $u_2 = z_2$ (vgl. Fig. 6). Als Endergebnis der obigen Untersuchungen erhalten wir also:

Die Punkte P_1, P_2, P_3 lassen sich so wählen, dass $O\,P_1\,P_3\,P_2$ das Fundamentalparallelogramm eines mit dem ursprünglichen Gitter (x_1, x_2) äquivalenten Gitters (v_1, v_2) ist.

Indem wir

7:o $P_1 = (v_1, v_2) = (1, 0), \quad P_2 = (v_1, v_2) = (0, 1), \; P_3 = (v_1, v_2) = (1, 1)$

setzen, dürfen wir daher annehmen, dass die Gitter (v_1, v_2) und (x_1, x_2) äquivalent sind.

Wir nennen das Gitter (v_1, v_2) ein in bezug auf die Figur K reduziertes Gitter.

19. Für den Flächeninhalt der Figur K_3 (vgl. Nr 18, 4:o), d. h. für $J\,F_3^2 (= J_x\,F_3^2 = J_v\,F_3^2$; vgl. Nr 18, 2:o und 7:o), lässt sich im allgemeinen keine obere Grenze angeben. Wohl aber können wir den folgenden Satz beweisen [1]):

Hilfssatz 1. *Falls die Figur K_1 einen Punkt enthält, dessen v_2-Koordinate gleich 1 ist, gilt die Beziehung $J\,F_3^2 \leqq 8$.*

Unserer Annahme gemäss enthält die Figur $[2]\,K_1$ (vgl. Nr 18, 5:o) einen Punkt, dessen v_2-Koordinate gleich 2 ist, und daneben enthält sie die Punkte $(v_1, v_2) = (\pm 2, 0)$. Von der Geraden $v_2 = 1$ schneidet $[2]\,K_1$ mithin eine Strecke ab, deren Länge $\geqq 2$ ist, so dass wenigstens zwei Gitterpunkte der genannten Geraden der Figur angehören. K_3 gehört daher ganz und gar $[2]\,K_1$, woraus hervorgeht, dass O, P_1, P_1' die einzigen Punkte der v_1-Achse und O, P_2, P_2' die einzigen Punkte der v_2-Achse sind, welche innere Gitterpunkte von K_3 sein können. Ferner kann K_3 — ihrer Definition gemäss — von O verschiedene Gitterpunkte nur auf den v_1- und v_2-Achsen enthalten, *wonach kein von O, P_1, P_1', P_2, P_2' verschiedener Punkt ein innerer Gitterpunkt von K_3 ist.*

---

[1]) Die Beziehung $J\,F_3^2 \leqq 8$ wird nirgends angegeben, kommt aber implizite bei MINKOWSKI vor (vgl. (e) und (c), Kap. II, § 11 und § 12). Sie stellt sich indessen nur in dem speziellen Falle heraus, wo $K_1 = K_2$ ist, wobei der Punkt $P_2 = (v_1, v_2) = (0, 1)$ auf die Begrenzung der Figur K_1 fällt. Unser Hilfssatz 1 ist daher allgemeiner als das entsprechende Ergebnis MINKOWSKIS.

Wir führen nun ein neues Gitter[1]) (w_1, w_2) ein, indem wir $P_3 = (v_1 = 1, v_2 = 1) = (w_1 = 1, w_2 = 0)$ und $(v_1 = -1, v_2 = +1) = (w_1 = 0, w_2 = 1)$ wählen. Wir substituieren m. a. W.

$$(80) \qquad w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad w_2 = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2),$$

und die Determinante der Substitution ist hierbei

$$(81) \qquad \Delta = \frac{1}{2}.$$

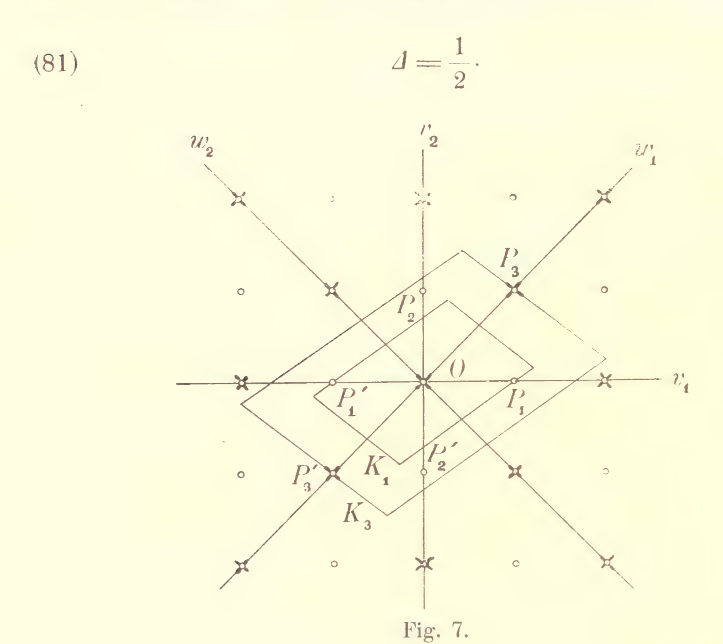


Fig. 7.

Das neue w-Gitter ist weniger dicht als das v-Gitter, indem die w-Gitterpunkte sämtlich auch v-Gitterpunkte sind, aber nicht umgekehrt. Z. B. sind die Punkte P_1, P_1', P_2, P_2' v-Gitterpunkte, *nicht* aber w-Gitterpunkte, weil ihre w_1- (und w_2-) Koordinaten nach (80) ihren Beträgen nach gleich $\frac{1}{2}$ sind. Weil die Figur K_3 im Inneren keinen von O, P_1, P_1', P_2, P_2' verschiedenen v-Gitter-

[1]) Siehe Fig. 7, wo die Gitterpunkte (w_1, w_2) mit Kreuzen markiert wurden. Es sei hervorgehoben, dass Hilfssatz 1 auch dann gilt, wenn die Figuren K_1 und K_3 keine Parallelogramme sind; nur aus Bequemlichkeitsgründen wurden in Fig. 7 parallelogrammatische Figuren K_1 und K_3 gezeichnet.

punkt enthält (vgl. oben), hat sie mithin keinen von O verschiedenen inneren w-Gitterpunkt aufzuweisen, und nach dem Fundamentalsatz MINKOWSKIS ist daher (vgl. Nr 18, 2:o) $J_w F_3^2 \leqq 4$. Wir erhalten dann nach (81) $J F_3^2 = J_x F_3^2 = J_v F_3^2 = 2 J_w F_3^2 \leqq 8$, so dass Hilfssatz 1 tatsächlich gilt.

Ferner wollen wir den folgenden Satz herleiten[1]) (vgl. Nr 18, 5:o und 6:o):

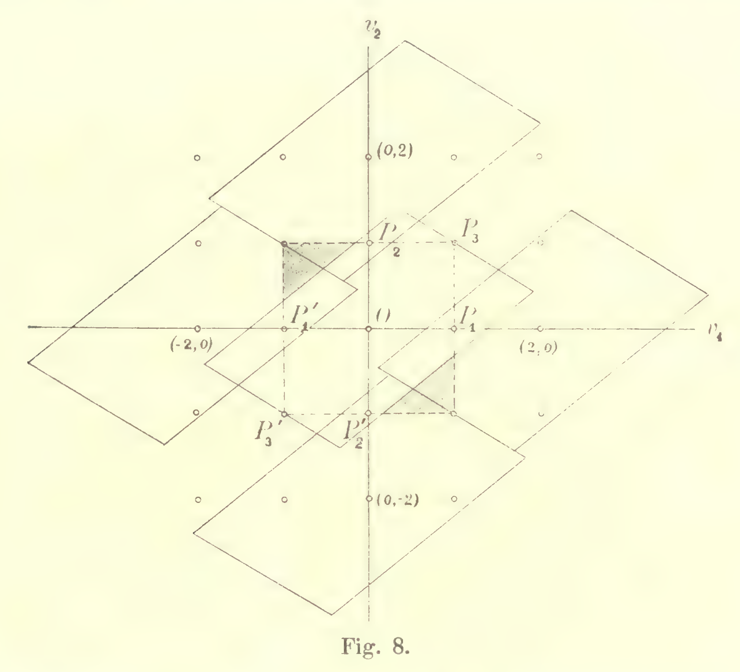


Fig. 8.

Hilfssatz 2. *Falls die Figur K_1 ein Parallelogramm ist, überdecken die Figuren $\left[\frac{1}{2}\right] K_3(v_1, v_2)$ $(v_1, v_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ lückenlos die (v_1, v_2)-Ebene.*

Die Figur $K_3(0, 0)$ überdeckt das Parallelogramm $|v_1| \leqq 1$, $|v_2| \leqq 1$, zwei (in Fig. 8 schraffierte) Dreiecke eventuell ausgenommen. Die eventuell unbedeckten Bezirke sind Dreiecke, weil

1) Es ist zu bemerken: Hilfssatz 2 gilt, sobald K_1 ein *Parallelogramm* ist. Die Bedingung des Hilfssatzes 1 braucht nicht erfüllt zu sein, umso weniger die MINKOWSKIsche Bedingung $K_1 = K_2$ (vgl. Fussnote 1) auf S. 44).

K_3 unserer Annahme gemäss ein Parallelogramm ist; daraus[1]) folgt auch, dass die fraglichen Dreiecke bzw. von den Figuren $K_3\,(2, 0)$, $K_3\,(0, -2)$ und $K_3\,(-2, 0)$, $K_3\,(0, 2)$ überdeckt werden. Die fünf Figuren $K_3\,(0, 0)$, $K_3\,(\pm 2, 0)$, $K_3\,(0, \pm 2)$ überdecken also lückenlos das Parallelogramm $|v_1| \leq 1$, $|v_2| \leq 1$, und die Figuren $K_3\,(2\,v_1, 2\,v_2)$ $(v_1, v_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ überdecken mithin lückenlos die (v_1, v_2)-Ebene, woraus die Richtigkeit des Hilfssatzes 2 unmittelbar hervorgeht.

20. Indem wir die Hilfssätze der vorigen Nummer heranziehen, können wir nun den Satz 16 ohne Mühe beweisen.

Wir gehen von den Formen

$$(82)\quad \begin{aligned} l_1\,(x_1, x_2) &= a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 - c_1 = a_{1,1}\,(x_1 - \xi_1) + a_{1,2}\,(x_2 - \xi_2) \\ l_1\,(x_1, x_2) &= a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 - c_2 = a_{2,1}\,(x_1 - \xi_1) + a_{2,2}\,(x_2 - \xi_2) \end{aligned}$$

(vgl. (64) und (69)) mit

$$(83)\qquad \text{abs.}\,|a_{\nu,\mu}| = D > 0 \qquad (\nu, \mu = 1, 2)$$

(vgl. (65)) aus und setzen

$$(84)\quad \begin{aligned} m_1\,(x_1, x_2) &= a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 \\ m_2\,(x_1, x_2) &= a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2. \end{aligned}$$

In die (x_1, x_2)-Ebene zeichnen wir die Geraden $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ und ein *beliebiges* Parallelogramm K mit Diagonalen auf diesen Geraden. K wird offenbar durch die Beziehung

$$(85)\qquad \left|\frac{m_1}{\varrho_1}\right| + \left|\frac{m_2}{\varrho_2}\right| \leq 1$$

(ϱ_1, ϱ_2 = beliebig gewählten positiven reellen Konstanten) definiert, und in betreff der entsprechenden Figuren K_1, K_3 bzw. $\left[\frac{1}{2}\right] K_3$ muss die obere Grenze 1 durch F_1, F_3 bzw. $\frac{1}{2}\,F_3$ ersetzt werden.

---

[1]) Falls K_3 = dem Sechseck $P_1\,P_3\,P_2\,P_1'\,P_3'\,P_2'$ ist, erreicht man keine lückenlose Überdeckung der (v_1, v_2)-Ebene vermittels der Figuren $K_3\,(2\,v_1, 2\,v_2)$ $(v_1, v_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

Wir führen ein in bezug auf die Figur K reduziertes Gitter (v_1, v_2) ein, das mit dem Gitter (x_1, x_2) äquivalent ist (vgl. Nr 18, 7:o), und unterscheiden zwei Fälle.

I. Falls K_1 einen Punkt enthält, dessen v_2-Koordinate gleich 1 ist (siehe Fig. 9), lässt sich Hilfssatz 1 auf das Parallelogramm K_3 in Anwendung bringen. Es ist nach (85) (vgl. Nr 18, 2:o)

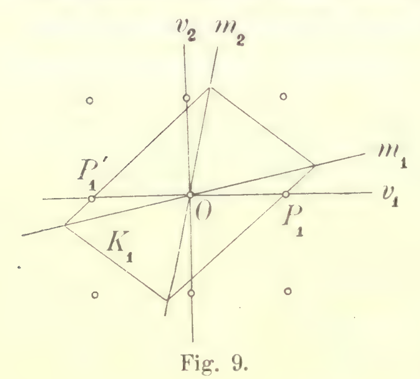


Fig. 9.

$$J_m = \iint_K dm_1\, dm_2 = 2\,\varrho_1\,\varrho_2,$$

und nach (83) und (84) haben wir mithin

$$J_x = \frac{2\,\varrho_1\,\varrho_2}{D}.$$

Hilfssatz 1 gibt uns daher

$$(86) \qquad F_3 < 2\sqrt{\frac{2}{J}} = 2\sqrt{\frac{2}{J_x}} = 2\sqrt{\frac{D}{\varrho_1\,\varrho_2}}.$$

Das geometrische Mittel aus irgend zwei Beträgen ist nie grösser als deren arithmetisches Mittel (vgl. (29)); nach (86) haben wir also für jeden Punkt (x_1, x_2) der Figur $\left[\frac{1}{2}\right] K_3 = \left[\frac{1}{2}\right] K_3(0,0)$

$$\sqrt{\left|\frac{m_1}{\varrho_1}\right| \left|\frac{m_2}{\varrho_2}\right|} < \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{m_1}{\varrho_1}\right| + \left|\frac{m_2}{\varrho_2}\right|\right\} \le \frac{1}{2}\,\frac{F_3}{2} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{\varrho_1\,\varrho_2}},$$

d. h.

$$(87) \qquad |\,m_1(x_1, x_2)\, m_2(x_1, x_2)\,| \le 2^{-2} D.$$

Der Punkt (ξ_1, ξ_2) (vgl. (82)) gehört nach dem Hilfssatz 2 wenigstens einem Parallelogramm $\left[\frac{1}{2}\right] K_3\,(X_1, X_2)$ an, dessen Mittelpunkt ein v-Gitterpunkt und mithin auch ein x-Gitterpunkt ist. Nach (87) haben wir

$$|\,m_1(\xi_1 - X_1, \xi_2 - X_2)\, m_2(\xi_1 - X_1, \xi_2 - X_2)\,| \le 2^{-2} D,$$

und nach (84) und (82) lässt sich diese Beziehung in der Form

$$|\, l_1(X_1, X_2)\, l_2(X_1, X_2)\, \leqq 2^{-2} D$$

schreiben. Satz 16 ist damit — für den Fall I — bewiesen.

II. Es sei nunmehr $v_2 < 1$ für jeden Punkt der Figur K_1. Nach (84) und (83) sind die m_1- und m_2-Achsen zu einander *nicht* parallel; wenigstens eine derselben — sei es die m_1-Achse — schneidet daher die Gerade $v_2 = 1$; den Schnittpunkt nennen wir Q.

Wir betrachten dasjenige Parallelogramm $\bar{K}_1$ (in Fig. 10 schraffiert) mit Diagonalen auf den m_1- und m_2-Achsen, auf dessen Begrenzung die Punkte P_1, P_1', Q, Q' fallen. Ferner führen wir ein in bezug auf die Figur $\bar{K}$ reduziertes Gitter $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ ein, das mit den Gittern (x_1, x_2) und (v_1, v_2) äquivalent ist. Das neue Gitter lässt sich offenbar so wählen, dass die Geraden $v_2 = 1$ und $\bar{v}_2 = 1$ identisch sind (die positive $\bar{v}_1$-Achse fällt hierbei entweder mit der positiven oder mit der negativen v_1-Achse zusammen). Das Parallelogramm $\bar{K}_1$ genügt dann der Bedingung des Hilfssatzes 1, und die Richtigkeit des Satzes 16 geht auf dieselbe Weise wie im Falle I hervor.

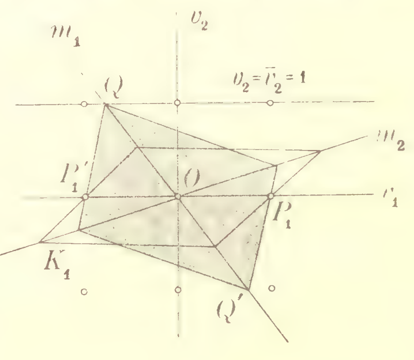


Fig. 10.

Literatur.

(a) HURWITZ, Über lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln, Nachr. von der K. Ges. der Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1897.

(b) MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen, Teubner, 1910.

(c) — „ —, Diophantische Approximationen, Teubner, 1907.

(d) — „ —, Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen, Nachr. von der K. Ges. der Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1899; Ges. Abh. I, Teubner, 1911.

(e) — „ —, Über die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen, Math. Annalen, Bd. 54, 1901; Ges. Abh. I, Teubner, 1911.

(f) MORDELL, MINKOWSKI's theorem on the product of two linear forms, The Journal of the London Math. Soc., Vol. 3, Part 1, No 9, January 1928.

(g) PIPPING, Zur Theorie der arithmetischen Kriterien für die reellen algebraischen Zahlen, Dissertation, Helsingfors, 1917.

(h) — „ —, Einige Sätze über konvexe Körper in Beziehung zu Punktgittern, Soc. Scient. Fennica, Comm. Phys.-Math., II, 27, Helsingfors, 1925.

(i) REMAK, Verallgemeinerung eines MINKOWSKI'schen Satzes, Math. Zeitschrift, Bd. 17 und Bd. 18, 1923.

(k) — „ –, Neuer Beweis eines MINKOWSKIschen Satzes, Journal f. d. r. u. a. Math., Bd. 142, 1913.

(l) WEBER—WELLSTEIN, Der MINKOWSKIsche Satz über die Körperdiskriminante, Math. Annalen, Bd. 73, 1913.

Inhalt.

ÜBER DIE BERECHNUNG DER WURZELN EINER ALGEBRAISCHEN ODER TRANSCENDENTEN GLEICHUNG

Von

K. A. POUKKA

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI-AKTIENGESELLSCHAFT SANA

Über die Berechnung der Wurzeln einer algebraischen oder transcendenten Gleichung.

1. Hat die Gleichung

$$f(x) = 0$$

eine einfache oder mehrfache Wurzel $x_0 = a + h$, deren Abstand von dem Ausgangspunkte $x = a$ kleiner als die entsprechenden Abstände der übrigen Wurzeln ist, und ist die Funktion $f(x)$ in dem Kreisgebiete

$$|x - a| \leqq |x_0 - a|$$

oder

$$|x - a| \leqq |h|$$

regulär, so ist die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ in dem Kreise $|x - a| < |h|$ regulär und hat auf seiner Peripherie nur einen einzigen Pol $x_0 = a + h$, ohne andere Singulärpunkte. Dann und nur dann konvergiert, nach einem bekannten Satze[1]), das Verhältnis von zwei auf einander folgenden Koeffizienten C_{n-1} und C_n in der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a+z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots$$

gegen den Wert h, wenn $n = \infty$ wird. Es ist somit

[1]) J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *Journal de Mathématiques*, 4:e série, t. VIII, 1892, p. 118.

Darboux, Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série, *Journ. de Math.* 3:e série, t. IV, 1878, p. 15.

Siehe auch Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, 1901.

$$h = \lim_{n=\infty} \frac{C_{n-1}}{C_n}$$

und

$$x_0 = a + \lim_{n=\infty} \frac{C_{n-1}}{C_n}.$$

Das Verhältnis $\frac{C_{n-1}}{C_n}$ gibt uns also einen Näherungswert h_a von h. Unsere Aufgabe im Folgenden ist, den Fehler von h_a bei einem gewissen n zu bestimmen.

2. Zu diesem Zweck wollen wir zuerst für den Koeffizienten C_n und für das Verhältnis $\frac{C_{n-1}}{C_n} = h_a$ Ausdrücke finden, wo diese Grössen durch die Koeffizienten der Taylor'schen Reihe

$$f(a+z) = f(a) + f'(a)z + \frac{1}{2!} f''(a) z^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{n)}(a) z^n + \cdots$$

bestimmt sind. Bezeichnen wir der Kürze wegen die Koeffizienten dieser Reihe mit $f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$, so dass

$$f(a+z) = f + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots + f_n z^n + \cdots$$

ist, so haben wir für die Bestimmung von C_n die Gleichung

$$(f + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots + f_n z^n + \cdots)(C_0 + C_1 z + z_2 z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots) = 1.$$

Wir erhalten hieraus das Gleichungssystem

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{r} f C_n + f_1 C_{n-1} + f_2 C_{n-2} + \cdots + f_{n-1} C_1 + f_n C_0 = 0 \\ f C_{n-1} + f_1 C_{n-2} + \cdots + f_{n-2} C_1 + f_{n-1} C_0 = 0 \\ f C_{n-2} + \cdots + f_{n-3} C_1 + f_{n-2} C_0 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f C_1 + f_1 C_0 = 0 \\ f C_0 = 1 \end{array} \right.$$

und weiter

$$C_n = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ 0 & f & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & & f & f_1 \\ 1 & 0 & \cdots & & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ 0 & f & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & f & f_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f \end{vmatrix}} = (-1)^n \cdot \frac{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ & f & \cdots & f_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & f & f_1 \end{vmatrix}}{f^{n+1}}$$

Die Determinante im Zähler des letzten Ausdruckes bezeichnen wir mit

(2) $$D_n = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ & f & f_1 & \cdots & f_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & f & f_1 & f_2 \\ & & & f & f_1 \end{vmatrix},$$

wo die Elemente 0 am Anfang der Horizontalreihen (von der 3. an) nicht ausgeschrieben sind. Wir gewinnen als Resultat die folgenden Formeln

(3) $$C_n = (-1)^n \frac{D_n}{f^{n+1}}$$

und

$$\frac{C_{n-1}}{C_n} = -f \frac{D_{n-1}}{D_n}$$

oder

(4) $$h_a = -f \frac{D_{n-1}}{D_n}.$$

Für $n = 0$ und 1 definieren wir die Determinanten nach den Formeln (2) und (3):

(5) $$\begin{cases} D_0 = 1 \\ D_1 = f_1. \end{cases}$$

Wenn wir nach (3) C_p in die Gleichung

$$f C_p + f_1 C_{p-1} + f_2 C_{p-2} + \cdots + f_{p-1} C_1 + f_p C_0 = 0 \text{ (für } p \geqq 1),$$

die nach (1) bestehen muss, einsetzen, erhalten wir für die Berechung der sukzessiven D die Formel

(6)
$$D_p = f_1 D_{p-1} + f_2 (-f) D_{p-2} + f_3 (-f)^2 D_{p-2} + \cdots \\ \cdots + f_{p-1} (-f)^{p-2} D_1 + f_p (-f)^{p-1} D_0$$

Wir gewinnen den folgenden Satz:

Ist $x_0 = a + h$ *eine solche einfache oder mehrfache Wurzel der algebraischen oder transcendenten Gleichung*

$$f(x) = 0,$$

dass ihr Abstand von dem Punkte $x = a$ *kleiner als die entsprechenden Abstände der übrigen Wurzeln ist, und ist noch die Funktion regulär in dem Kreisgebiete*

$$|x - a| \leqq |x_0 - a|,$$

so *ist dann* und *nur dann*

(7)
$$h = -f \lim_{n=\infty} \frac{D_{n-1}}{D_n}$$

und

(8)
$$x_0 = a - f \lim_{n=\infty} \frac{D_{n-1}}{D_n}.$$

Ist die Gleichung eine algebraische Gleichung, so kann man mit Hilfe der Rekursionsformel (6) auch direkt leicht zeigen, dass

$$a - f \lim_{n=\infty} \frac{D_{n-1}}{D_n},$$

wenn es existiert, eine Wurzel der Gleichung ist. Ist die Gradzahl der algebraischen Gleichung m, ist also $f(x)$ ein Polynom $m \cdot$ Grades, so lautet die Rekursionsformel für $n \geqq m$

$$D_n = f_1 D_{n-1} + f_2 (-f) D_{n-2} + f_3 (-f)^2 D_{n-3} + \cdots \\ \cdots + f_{m-1} (-f)^{m-2} D_{n-m+1} + f_m (-f)^{m-1} D_{n-m}$$

weil $f_{m+1} = f_{m+2} = \cdots = 0$ sind.

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit $-\frac{f}{D_n}$

$$-f = f_1(-f)\frac{D_{n-1}}{D_n} + f_2(-f)^2\frac{D_{n-2}}{D_n} + f_3(-f)^3\frac{D_{n-3}}{D_n} + \cdots$$
$$\cdots + f_{m-1}(-f)^{m-1}\frac{D_{n-m+1}}{D_n} + f_m(-f)^m\frac{D_{n-m}}{D_n}.$$

Wenn $-f\frac{D_{n-1}}{D_n}$ für $n=\infty$ gegen einen Wert a konvergiert, so konvergiert

$$\left(-f\right)^2\frac{D_{n-2}}{D_n} = \left(-f\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}\right)\left(-f\frac{D_{n-1}}{D_n}\right) \qquad \text{gegen } a^2,$$
$$\left(-f\right)^3\frac{D_{n-3}}{D_n} = \left(-f\frac{D_{n-3}}{D_{n-2}}\right)\left(-f\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}\right)\left(-f\frac{D_{n-1}}{D_n}\right) \text{ gegen } a^3,$$

. . . .

$$\left(-f\right)^m\frac{D_{n-m}}{D_n} \qquad \text{gegen } a^m$$

und wir erhalten die Gleichung

$$-f = f_1 a + f_2 a^2 + f_3 a^3 + \cdots + f_m a^m$$

oder

$$f + f_1 a + f_2 a^2 + f_3 a^3 + \cdots + f_m a^m = 0$$

d. h.

$$f(a+a) = 0$$

w. z. b. w.

Eine andere Ableitung der Formel von h_a und das Korrektionsglied.

3. Wir können die Formel (4) für h_a auch in einer anderen Weise erhalten, nämlich durch ein Verfahren, welches uns auch ein Korrektionsglied für h_a liefert. Ist h eine Wurzel der Gleichung

$$f(a+z)=0,$$

so erhalten wir nach dem Taylor'schen Satz die n Gleichungen

$$\begin{aligned}
f+f_1 h+f_2 h^2+\cdots+f_n h^n &= -h^{n+1}\varphi_{n+1},\\
f+f_1 h+\cdots+f_{n-1} h^{n-1} &= -h^n \varphi_n,\\
f+\cdots+f_{n-2} h^{n-2} &= -h^{n-1}\varphi_{n-1},\\
&\cdots\cdots\\
f+f_1 h+f_2 h^2 &= -h^3\cdot\varphi_3,\\
f+f_1 h &= -h^2\cdot\varphi_2,
\end{aligned}$$

wenn das Restglied der Taylor'schen Reihe in der Form $R_n=h^n\cdot\varphi_n$ geschrieben ist.

Wenn man die Restglieder in den obigen Gleichungen nicht berücksichtigt, so gibt jede von diesen Gleichungen einen „Näherungswert“ für h, die letzte z. B. ergibt die bekannte Newton'sche Formel. Wenn wir aber diese Gleichungen mit Potenzen von h multiplizieren, die erste mit h^0, die zweite mit $h^1, \cdots$, die letzte mit h^{n-1}, erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
f+f_1 h+f_2 h^2+\cdots\cdots+f_n h^n &= -h^{n+1}\varphi_{n+1}\\
f h+f_1 h^2+\cdots\cdots+f_{n-1} h^n &= -h^{n+1}\varphi_n\\
f h^2+\cdots\cdots+f_{n-2} h^n &= -h^{n+1}\varphi_{n-1}\\
&\cdots\cdots\\
f h^{n-2}+f_1 h^{n-1}+f_2 h^n &= -h^{n+1}\varphi_3\\
f h^{n-1}+f_1 h^n &= -h^{n+1}\varphi_2
\end{aligned}\right.$$

wo die rechten Seiten in bezug auf h vom $(n+1)$. Grade sind. Wenn man jetzt die rechten Seiten vernachlässigt und das System als System von n linearen Gleichungen mit den unbekannten $h, h^2, \cdots, h^n$, betrachtet, so erhält man für h einen gewissen „Näherungswert“ h_a

$$h_a = - \frac{\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ & f & f_1 & \cdots & f_{n-2} \\ & & f & \cdots & f_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & f & f_1 & f_2 \\ & & & f & f_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ & f & f_1 & \cdots & f_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & f & f_1 & f_2 \\ & & & f & f_1 \end{vmatrix}}$$

oder

$$h_a = -f \frac{D_{n-1}}{D_n}.$$

Dies ist der durch die Gleichung (4) schon bestimmte Näherungswert von h, von dem wir wissen, dass er für $n = \infty$ gegen h konvergiert, wenn h die dem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung $f(a+z) = 0$ ist.

4. Wenn wir in dem Gleichungssystem (9) auch die rechten Seiten beachten, erhalten wir

$$h = -f \frac{D_{n-1}}{D_n} - h^{n+1} \frac{D'_n}{D_n}, \tag{10}$$

wo

$$D'_n = \begin{vmatrix} \varphi_{n+1} & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ \varphi_n & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ \varphi_{n-1} & f & f_1 & \cdots & f_{n-2} \\ \varphi_{n-2} & 0 & f & \cdots & f_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_2 & 0 & & f & f_1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

ist. Diese Determinante D'_n entsteht aus der Determinante D_n dadurch, dass die erste Vertikalreihe der Determinante D_n durch die Elemente $\varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_{n+1}$, von unten an, ersetzt wird. Weil die Grösse φ_p durch die Gleichung $R_p = h^p \varphi_p$ definiert wurde, so

haben wir, solange wir uns in dem reellen Gebiete bewegen, nach der Lagrange'schen Formel

(12) $$\varphi_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(\xi_p),$$

und im komplexen Gebiete haben wir nach der Darboux'schen Formel

(13) $$\varphi_p = \frac{\lambda_p}{p!} f^{(p)}(\xi_p).$$

Hier ist ξ_p eine Zahl auf dem Strahl $a \longrightarrow a + h$, und λ_p ist eine Zahl, deren absoluter Betrag höchstens 1 ist.

Die Gleichung (10) besteht für jedes h, das eine Wurzel der Gleichung $f(a+z) = 0$ ist, vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x)$ auf dem Strahl $a \longrightarrow a + h$ regulär ist. Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung (10) ist der Näherungswert h_a, das zweite Glied,

(14) $$r_{n+1} = -h^{n+1} \frac{D'_n}{D_n},$$

ist das Korrektionsglied, das zu dem Näherungswert h_a addiert die betreffende Wurzel der Gleichung $f(a+z) = 0$ gibt:

(15) $$h = h_a + r_{n+1}.$$

Das Korrektionsglied r_{n+1} nähert sich für $n = \infty$ Null dann und nur dann, wenn die Gleichung $f(a+z) = 0$ eine Wurzel h hat, deren absoluter Betrag kleiner als der der übrigen Wurzeln ist. Nur in diesem Falle kann die Formel (10) oder (15) zur Berechnung einer Wurzel angewandt werden. Die später behandelten Beispiele zeigen uns näher, wie nützlich und bequem das hier erfundene Korrektionsglied beim Abschätzen des Fehlers ist, welcher für ein gewisses n begangen wird.

Es sei noch bemerkt, dass der Näherungswert h_a für $n = 1$ die bekannte Newton'sche Formel ergibt, während die allgemeine Formel (4) für h_a als eine Verallgemeinerung der Newton'schen For-

mel angesehen werden kann. Das Verfahren selbst, das hier zum Ableiten der Formel (10) benutzt wurde, kann man als eine Verallgemeinerung der NEWTON'schen Methode betrachten.

Über die Berechnung der Determinanten.

5. Die sukzessiven Determinanten D_n können mit Hilfe der Rekursionsformel (6) bestimmt werden, indem man von dem Werte $D_0 = 1$ (und $D_1 = f_1$) ausgeht. Sind die ersten Koeffizienten $f, f_1, \cdots$ z. B. $f = 2, f_1 = 5, f_2 = 3, f_3 = -1, f_4 = 1, f_5 = 2$, so können die Determinante

$$D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ & 2 & 5 & 3 & -1 \\ & & 2 & 5 & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

und die Determinanten D_2, D_3, D_4 folgendermassen berechnet werden. Die Koeffizienten der Rekursionsformel sind

$$5, 3 \cdot (-2), (-1)(-2)^2, 1 \cdot (-2)^3, 2 \cdot (-2)^4$$

oder

$$5, -6, -4, -8, 32$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 \\ D_1 &= 5 \\ D_2 &= 5 \cdot D_1 - 6 D_0 = 19 \\ D_3 &= 5 \cdot D_2 - 6 D_1 - 4 D_0 = 61 \\ D_4 &= 5 \cdot D_3 - 6 D_2 - 4 D_1 - 8 D_0 = 163 \\ D_5 &= 5 \cdot D_4 - 6 D_3 - 4 D_2 - 8 D_1 + 32 D_0 = 365. \end{aligned}$$

Man kann aber die Werte von D_n, wegen der besonderen Form dieser Determinanten, auch direkt mit Hilfe bekannter Eigenschaften der Determinanten bestimmen. Die 2., 3. 4., $\cdots$ Horizontalreihe werden sukzessiv auf eine im Folgenden näher erklärte Weise so

geändert, dass das erste von Null abweichende Element der betreffenden Horizontalreihe auf der Hauptdiagonale liegen wird. Die 2. Horizontalreihe in der geänderten Form erhält man, wenn man die mit $-f$ multiplizierte 1. Horizontalreihe und die mit f_1 $(= D_1)$ multiplizierte 2. Horizontalreihe addiert; das 2. Element der Hauptdiagonale (von oben an) wird dann $= D_2$ sein, wie man leicht bemerkt. Die 3. Horizontalreihe in der geänderten Form erhält man, wenn man die mit $-f$ multiplizierte 2. Horizontalreihe (in der geänderten Form) und die mit D_2 multiplizierte 3. Horizontalreihe addiert; das 3. Element der Hauptdiagonale wird dann $= D_3$ sein u. s. f. Wenn wir dieses Verfahren auf die oben behandelte Determinante D_5 anwenden und die geänderten Horizontalreihen mit den zu ihrer Bildung benutzten Multiplikationen und Additionen ausschreiben, entsteht das folgende *Schema:*

— 6	+ 2	— 2	— 4
25	15	— 5	5
19	17	— 7	1
	— 34	14	— 2
	95	57	— 19
	61	71	— 21
		— 142	42
		305	183
		163	225
			— 450
			815
			365

Wenn man dieses Verfahren auf die allgemeine Determinante D_p anwendet, erhält man die Rekursionsformel (6).

6. Für die Abschätzung des Korrektionsgliedes r_{n+1}, wo die Determinante D'_n sich nur durch die erste Vertikalreihe von der Determinante D_n unterscheidet, ist es notwendig, die zu der ersten Vertikalreihe von D_n gehörenden *Unterdeterminanten* zu bestimmen. Die Berechnung dieser Unterdeterminanten erklärt sich am besten

durch ein Beispiel. Wir bestimmen die Unterdeterminanten der ersten Vertikalreihe der oben behandelten Determinante D_5. Bezeichnen wir diese Unterdeterminanten von oben an mit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, so sieht man zuerst ohne weiteres, dass

$$A_1 = D_4 = 163 \text{ ist.}$$

Die folgenden Unterdeterminanten werden sukzessiv mit Hilfe des Satzes bestimmt: wenn die Unterdeterminanten einer Reihe mit den Elementen dieser Reihe multipliziert werden, ist die Summe der Produkte der Hauptdeterminante gleich; wenn man aber als Multiplikatoren die Elemente einer parallelen Reihe anwendet, ist die Summe der Produkte Null.

Die erste Vertikalreihe gibt uns

$$2\,A_2 + 5\,A_1 = D_5\,,$$

so dass

$$A_2 = \frac{1}{2}\,(D_5 - 5\,A_1) = -\,225$$

ist.

Nach der zweiten Vertikalreihe folgt

$$2\,A_3 + 5\,A_2 + 3\,A_1 = 0\,,$$

so dass

$$A_3 = -\,\frac{1}{2}\,(5\,A_2 + 3\,A_1) = 318 \text{ ist.}$$

Nach der dritten Vertikalreihe erhält man

$$2\,A_4 + 5\,A_3 + 3\,A_2 - A_1 = 0$$

und

$$A_4 = -\,\frac{1}{2}\,(5\,A_3 + 3\,A_2 - A_1) = -\,376$$

Die 4. Vertikalreihe gibt wieder

$$2\,A_5 + 5\,A_4 + 3\,A_3 - A_2 + A_1 = 0$$

und

$$A_5 = -\,\frac{1}{2}\,(5\,A_4 + 3\,A_3 - A_2 + A_1) = 269$$

Die betreffenden Unterdeterminanten sind hiermit bestimmt.

Aus der letzten (der 5.) Vertikalreihe kann man noch eine *Kontrolle* für die ganze Determinantenbestimmung (sowohl von D als A) gewinnen. Es muss nämlich nach dieser letzten Vertikalreihe

$$5\,A_5 + 3\,A_4 - A_3 + A_2 + 2\,A_1 = 0$$

sein. Es ist auch wirklich

$$5 \cdot 269 + 3\,(-376) - 318 - 225 + 2 \cdot 163 \equiv 0.$$

In dem allgemeinen Fall, wo die Unterdeterminanten der ersten Vertikalreihe von D_n zu bestimmen sind, ist zuerst

(16) $$A_1 = D_{n-1}.$$

A_2 wird durch die Gleichung

(17) $$f\,A_2 + f_1\,A_1 = D_n$$

bestimmt und für $p = 3, 4, \cdots, n$ erhalten wir die Rekursionsformel

(18) $$f\,A_p + f_1\,A_{p-1} + f_2\,A_{p-2} + \cdots + f_{p-}\;A_1 = 0, \quad (p = 3, \cdots, n),$$

mit deren Hilfe die Unterdeterminanten $A_3, A_4, \cdots, A_n$ sukzessiv berechnet werden können. Die Kontrollengleichung lautet in diesem allgemeinen Falle

(19) $$f_1\,A_n + f_2\,A_{n-1} + f_3\,A_{n-3} + \cdots + f_n\,A_1 = 0.$$

Anwendungen.

7. Wir werden im Folgenden vier Beispiele behandeln. Wir gehen aus von einem bestimmten „Näherungswert" $x = a$ der Gleichung $f(x) = 0$, dessen Abstand von einer Wurzel kleiner als die Abstände von den übrigen sein muss, bestimmen die Grössen

D_n bis zu einem gewissen n und schätzen darauf den Fehler in dem Näherungswert

$$h_a = -f\frac{D_{n-1}}{D_n}$$

mit Hilfe der Formel

$$r_{n+1} = -h^{n+1}\frac{D'_n}{D_n}$$

ab. Bei der Abschätzung muss man einen groben Näherungswert von h kennen.

Erstes Beispiel. Als erstes Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

die in vielen Untersuchungen behandelt ist, und berechnen die einzige, zwischen 2 und 3 liegende reelle Wurzel dieser Gleichung. Wir nehmen $a = 2$. Es ist

$$\left|\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 2x - 5 \\ f'(x) = 3x^2 - 2 \\ \frac{1}{2}f''(x) = 3x \\ \frac{1}{6}f'''(x) = 1 \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{l} f = f(2) = -1 \\ f_1 = f'(2) = 10 \\ f_2 = \frac{1}{2}f''(2) = 6 \\ f_3 = \frac{1}{6}f'''(2) = 1 \\ f_4 = f_5 = \ldots = 0 \end{array}\right.$$

Wir wollen den Näherungswert

$$h_a = -f\frac{D_{19}}{D_{20}} = \frac{D_{19}}{D_{20}}$$

berechnen und den Fehler abschätzen.

Nach der allgemeinen Rekursionsformel (6) haben wir

$$D_p = f_1 D_{p-1} + f_2(-f)D_{p-2} + f_3(-f)^2 D_{p-3}$$

oder

$$D_p = 10\,D_{p-1} + 6\,D_{p-2} + D_{p-3}.$$

Man erhält sukzessiv

$$
\begin{aligned}
D_0 &= 1 \\
D_1 &= 10 \\
D_2 &= 10\,D_1 + 6\,D_0 = 106 \\
D_3 &= 10\,D_2 + 6\,D_1 + D_0 = 112\,1 \\
D_4 &= 10\,D_3 + 6\,D_2 + D_1 = 118\,56 \\
D_5 &= 10\,D_4 + 6\,D_3 + D_2 = 125\,392 \\
D_6 &= 10\,D_5 + 6\,D_4 + D_3 = 132\,617\,7 \\
D_7 &= 10\,D_6 + 6\,D_5 + D_4 = 140\,259\,78 \\
D_8 &= 10\,D_7 + 6\,D_6 + D_5 = 148\,342\,234 \\
D_9 &= 10\,D_8 + 6\,D_7 + D_6 = 156\,890\,438\,5 \\
D_{10} &= 10\,D_9 + 6\,D_8 + D_7 = 165\,931\,232\,32 \\
D_{11} &= 10\,D_{10} + 6\,D_9 + D_8 = 175\,493\,000\,864 \\
D_{12} &= 10\,D_{11} + 6\,D_{10} + D_9 = 185\,605\,765\,2417 \\
D_{13} &= 10\,D_{12} + 6\,D_{11} + D_{10} = 196\,301\,27652586 \\
D_{14} &= 10\,D_{13} + 6\,D_{12} + D_{11} = 207\,613\,115\,441\,226 \\
D_{15} &= 10\,D_{14} + 6\,D_{13} + D_{12} = 219\,576\,797\,798\,019\,3 \\
D_{16} &= 10\,D_{15} + 6\,D_{14} + D_{13} = 232\,229\,886\,001\,018\,72 \\
D_{17} &= 10\,D_{16} + 6\,D_{15} + D_{14} = 245\,612\,106\,984\,341\,104 \\
D_{18} &= 10\,D_{17} + 6\,D_{16} + D_{15} = 259\,765\,476\,942\,200\,246\,5 \\
D_{19} &= 10\,D_{18} + 6\,D_{17} + D_{16} = 274\,734\,433\,247\,261\,731\,46 \\
D_{20} &= 10\,D_{19} + 6\,D_{18} + D_{17} = 290\,565\,973\,970\,778\,087\,354
\end{aligned}
$$

Für das Abschätzen des Fehlers bestimmen wir die Unterdeterminanten für die erste Vertikalreihe in der Determinante D_{20}. Es ist zuerst nach (16) $A_1 = D_{19}$ und nach den Formeln (17) und (18) ist

$$- A_2 + 10\,A_1 = D_{20} \text{ oder } A_2 = 10\,A_1 - D_{20}$$

und für $p = 3, 4, \cdots, 20$

$$- A_p + 10\,A_{p-1} + 6\,A_{p-2} + A_{p-3} = 0$$

oder

$$A_p = 10\,A_{p-1} + 6\,A_{p-2} + A_{p-3}$$

Hierdurch erhalten wir die sukzessiven Unterdeterminanten

$$
\begin{aligned}
A_1 &= D_{19} &&= 274\,734\,433\,247\,261\,731\,46\\
A_2 &= 10\,A_1 - D_{20} &&= -158\,315\,407\,235\,163\,558\,94\\
A_3 &= 10\,A_2 + 6\,A_1 &&= 652\,525\,271\,319\,347\,993\,6\\
A_4 &= 10\,A_3 + 6\,A_2 + A_1 &&= -226\,327\,388\,443\,716\,285\,8\\
A_5 &= 10\,A_4 + 6\,A_3 + A_2 &&= 687\,236\,711\,272\,895\,142\\
A_6 &= 10\,A_5 + 6\,A_4 + A_3 &&= -182\,023\,480\,700\,545\,792\\
A_7 &= 10\,A_6 + 6\,A_5 + A_4 &&= 399\,115\,761\,947\,500\,74\\
A_8 &= 10\,A_7 + 6\,A_6 + A_5 &&= -578\,841\,098\,287\,887\,0\\
A_9 &= 10\,A_8 + 6\,A_7 + A_6 &&= -438\,133\,360\,834\,048\\
A_{10} &= 10\,A_9 + 6\,A_8 + A_7 &&= 799\,776\,689\,136\,374\\
A_{11} &= 10\,A_{10} + 6\,A_9 + A_8 &&= -419\,444\,256\,519\,418\\
A_{12} &= 10\,A_{11} + 6\,A_{10} + A_9 &&= 166\,084\,208\,790\,016\\
A_{13} &= 10\,A_{12} + 6\,A_{11} + A_{10} &&= -560\,467\,620\,799\,74\\
A_{14} &= 10\,A_{13} + 6\,A_{12} + A_{11} &&= 165\,933\,754\,209\,38\\
A_{15} &= 10\,A_{14} + 6\,A_{13} + A_{12} &&= -426\,260\,948\,044\,8\\
A_{16} &= 10\,A_{15} + 6\,A_{14} + A_{13} &&= 887\,395\,641\,174\\
A_{17} &= 10\,A_{16} + 6\,A_{15} + A_{14} &&= -108\,325\,050\,010\\
A_{18} &= 10\,A_{17} + 6\,A_{16} + A_{15} &&= -214\,861\,335\,04\\
A_{19} &= 10\,A_{18} + 6\,A_{17} + A_{16} &&= 225\,840\,060\,74\\
A_{20} &= 10\,A_{19} + 6\,A_{18} + A_{17} &&= -114\,017\,902\,94
\end{aligned}
$$

Als Kontrolle für die Berechnung der Determinanten kann man nach der Formel (19) die Gleichung

$$10\,A_{20} + 6\,A_{19} + A_{18} = 0$$

benutzen. Wir finden, dass diese Bedingung wirklich erfüllt ist und dass sowohl die Determinanten D als die Unterdeterminanten A richtig bestimmt sind.

Hiernach werden wir den Fehler in dem Näherungswert von h

$$h_a = -f\frac{D_{19}}{D_{20}} = \frac{D_{19}}{D_{20}}$$

abschätzen. Das Korrektionsglied ist nach den Formeln (11) und (12)

$$r_{21} = -h^{21} \frac{D'_{20}}{D_{20}} = -h^{21} \frac{3\,\xi\,A_{20} + A_{19}}{D_{20}},$$

wo ξ zwischen 2 und $2 + h$ liegt. Es ist aber h positiv und kleiner als 1, so dass jedenfalls $2 < \xi < 3$ ist. Es muss somit, weil $3\,\xi\,A_{20} + A_{19}$ negativ ist,

$$r_{21} < \frac{-9\,A_{20} - A_{19}}{D_{20}}$$

d. h.

$$r_{21} < \frac{9 \cdot 11\,401\,790\,294 - 2\,258\,400\,6074}{D_{20}} < 0,0^9\,3$$

sein. Der Näherungswert $\frac{D_{19}}{D_{20}}$ gibt den Wert von h wenigstens mit 9 richtigen Dezimalen. Wenn man nur 4 Dezimalstellen ausrechnet, sieht man, dass

$$0,0945 < h < 0,0946$$

und

$$2 < \xi < 2,1$$

und

$$(0,0945)^{21} \frac{6 \cdot 11\,4017\,90294 - 2258\,4006074}{D_{20}} < r_{21}$$

$$< (0,0946)^{21} \frac{6,3 \cdot 11\,40179\,0294 - 22\,58400\,6074}{D_{20}}$$

oder

$$0,0^{31}\,48 < r_{21} < 0,0^{31}\,53.$$

Man sieht somit, dass der Näherungswert $\frac{D_{19}}{D_{20}}$ den Wert von h mit 31 und nur mit 31 richtigen Dezimalen gibt. Wenn man die Divison $\frac{D_{19}}{D_{20}}$ mit 33 Dezimalen ausführt — es ist dabei nützlich, zuerst die Produkte $2\,D_{20}$, $3\,D_{20}, \cdots, 9\,D_{20}$ zu bilden — erhält man

$$h = 0,09455\,14815\,42326\,59148\,23865\,40579\,253,$$

wo die 31 Dezimalen richtig sind. Wenn man noch die Grenzen von r_{21} benutzt, kann man den Wert von h mit 32 richtigen Dezimalen gewinnen:

$$h = 0{,}09455\ 14815\ 42326\ 59148\ 23865\ 40579\ 30$$

und die gesuchte Wurzel ist mit 32 Dezimalen

$$2{,}09455\ 14815\ 42326\ 59148\ 23865\ 40579\ 30.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Formel des Korrektionsgliedes nicht nur einen theoretischen Wert hat, sondern für das Abschätzen des Fehlers sehr geeignet ist und sehr scharfe Abschätzungen ergeben kann.

Das Korrektionsglied nähert sich mit wachsendem n Null um so schneller, je kleiner $|h|$ ist, wie die Formel für r_{n+1} zeigt. Wenn man einen ziemlich guten Anfangswert a hat, kann man schon für $n = 2$ oder 3 sehr genaue Wurzeln finden. Wenn der Anfangswert a und die entsprechenden $f, f_1, f_2 \cdots$ runde und bequeme rationale Zahlen sind, ist es bequem und leicht, die Rechnungen für grössere n auszuführen. Das ist der Fall in dem oben behandelten Beispiel und allgemein bei den algebraischen Gleichungen mit den ganzzahligen Koeffizienten, wo man durch eine Substitution $z = kx$ (k ist eine ganze Zahl) oft leicht einen guten und bequemen Anfangswert finden kann.

8. *Zweites Beispiel.* Wir wollen die kleinste reelle Wurzel $\left(=\frac{\pi}{6}\right)$ der Gleichung

$$2 \sin x = 1$$

oder

$$2 \sin x - 1 = 0$$

berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin x - 1 \\ f'(x) &= 2 \cos x \\ \frac{1}{2!} f''(x) &= -\sin x \\ \frac{1}{3!} f'''(x) &= -\frac{1}{3} \cos x \\ \frac{1}{4!} f^{(4)}(x) &= \frac{1}{12} \sin x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{5!} f^{(5)}(x) &= \frac{1}{60} \cos x \\ \frac{1}{6!} f^{(6)}(x) &= -\frac{1}{360} \sin x \\ \frac{1}{7!} f^{(7)}(x) &= -\frac{1}{2520} \cos x \\ \frac{1}{8!} f^{(8)}(x) &= \frac{1}{20160} \sin x \\ \frac{1}{9!} f^{(9)}(x) &= \frac{1}{181440} \cos x \end{aligned}$$

Wählen wir $a = 0$ als Ausgangswert, so haben wir

$$\left| \begin{array}{l} f = -1 \\ f_1 = 2 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = -\frac{1}{3} \\ f_4 = 0 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} f_5 = \frac{1}{60} \\ f_6 = 0 \\ f_7 = -\frac{1}{2520} \\ f_8 = 0 \\ \end{array} \right.$$

Die 8 ersten Koeffizienten in der Rekursionsformel

$$D_p = f_1 D_{p-1} + f_2 (-f) D_{p-2} + f_3 (-f)^2 D_{p-3} + \cdots + f_p (-f)^{p-1} D_0$$

sind somit

$$2, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{60}, 0, -\frac{1}{2520}, 0, \cdots$$

Wir erhalten für $D_0, D, \cdots, D_8$ die Werte

$$D_0 = 1$$
$$D_1 = 2$$
$$D_2 = 2 D_1 + 0 \cdot D_0 = 4$$
$$D_3 = 2 D_2 + 0 \cdot D_1 - \frac{1}{3} D_0 = \frac{23}{3}$$
$$D_4 = 2 D_3 + 0 \cdot D_2 - \frac{1}{3} D_1 + 0 \cdot D_0 = \frac{44}{3}$$
$$D_5 = 2 D_4 + 0 \cdot D_3 - \frac{1}{3} D_2 + 0 \cdot D_1 + \frac{1}{60} D_0 = \frac{1681}{60}$$
$$D_6 = 2 D_5 + 0 \cdot D_4 - \frac{1}{3} D_3 + 0 \cdot D_2 + \frac{1}{60} D_1 + 0 \cdot D_0 = \frac{2408}{45}$$
$$D_7 = 2 D_6 + 0 \cdot D_5 - \frac{1}{3} D_4 + 0 \cdot D_3 + \frac{1}{60} D_2 + 0 \cdot D_1 - \frac{1}{2520} D_0 = \frac{257543}{2520}$$
$$D_8 = 2 D_7 + 0 \cdot D_6 - \frac{1}{3} D_5 + 0 \cdot D_4 + \frac{1}{60} D_3 + 0 \cdot D_2 - \frac{1}{2520} D_1 + 0 \cdot D_0 = \frac{245936}{1260}$$

Die erste Unterdeterminante A_1 ist nach (16)

$$A_1 = D_7 = \frac{257543}{2520},$$

für die zweite gilt nach der Formel (17) die Gleichung

$$-A_2 + 2 \cdot A_1 = D_8,$$

so dass

$$A_2 = 2 A_1 - D_8 = \frac{11607}{1260}$$

ist. Für $p = 3, \cdots, 8$ erhält man nach der Formel (18) die Rekursionsformel

$$A_p = f_1 A_{p-1} + f_2 A_{p-2} + f_3 A_{p-3} + \cdots + f_{p-1} A_1 .$$

Wenn man gleich die Glieder Null weglässt, gewinnen wir die Werte

$$A_3 = 2 A_2 = \frac{11607}{630}$$
$$A_4 = 2 A_3 - \frac{1}{3} A_1 = \frac{21025}{7560}$$
$$A_5 = 2 A_4 - \frac{1}{3} A_2 = \frac{9418}{3780}$$
$$A_6 = 2 A_5 - \frac{1}{3} A_3 + \frac{1}{60} A_1 = \frac{82423}{120 \cdot 1260}$$
$$A_7 = 2 A_6 - \frac{1}{3} A_4 + \frac{1}{60} A_2 = \frac{143680}{60 \cdot 7560}$$
$$A_8 = 2 A_7 - \frac{1}{3} A_5 + \frac{1}{60} A_3 - \frac{1}{2520} A_1 = \frac{441393}{5040 \cdot 1260}$$

Die Kontrollengleichung lautet hier nach der Formel (19)

$$2 A_8 - \frac{1}{3} D_6 + \frac{1}{60} A_4 - \frac{1}{2520} A_2 = 0 .$$

Diese ist wirklich erfüllt und die Determinanten sind richtig bestimmt.

Jetzt werden wir den Fehler für den Näherungswert

$$h_a = - f \frac{D_7}{D_8} = \frac{D_7}{D_8}$$

nach der Formel

$$r_9 = - h^9 \frac{D'_8}{D_8}$$

abschätzen. h ist positiv, grösser als $\frac{1}{2}$ und jedenfalls kleiner als 0, 6, weil nach der Reihenentwicklung von sin x

$$\sin (0{,}6) - \frac{1}{2} > 0{,}6 - \frac{1}{3!} (0, 6)^3 - \frac{1}{2} > 0 \text{ ist.}$$

Weiter ist

$$D'_8 = - A_8 \sin \xi_2 - \frac{1}{3} A_7 \cos \xi_3 + \frac{1}{12} A_6 \sin \xi_4 + \frac{1}{60} A_5 \cos \xi_5 - \frac{1}{360} A_4 \sin \xi_6$$
$$- \frac{1}{2520} A_3 \cos \xi_7 + \frac{1}{20160} A_2 \sin \xi_8 + \frac{1}{181440} A_1 \cos \xi_9 \cdot$$

Weil $A_1, A_2 \cdots A_8$, alle positiv sind und jeder sinus in diesem Ausdruck zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt und jeder cosinus zwischen 1 und 0,86 (eigentlich zwischen 1 und $\frac{1}{2}\sqrt{3}$), können wir D'_8 zwischen zwei Grenzen setzen. Es ist

$$D_8' < \left(\tfrac{1}{12} A_6 + \tfrac{1}{20160} A_2\right) \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{60} A_5 + \tfrac{1}{181440} A_1\right) - \left(\tfrac{1}{3} A_7 + \tfrac{1}{2520} A_3\right) 0{,}86$$

und

$$D_8' > \left(\tfrac{1}{60} A_5 + \tfrac{1}{181440} A_1\right) 0{,}86 - \left(A_8 + \tfrac{1}{360} A_4\right) \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{3} A_7 + \tfrac{1}{2520} A_3\right).$$

Wenn man diese Grenzen berechnet, sieht man, dass

$$-0{,}12 < D_8' < -0{,}06.$$

Es ist somit D_8' negativ und r_9 positiv. Weiter ist

$$r_9 < (0{,}6)^9 \cdot \frac{0{,}12}{D_8} < 0{,}0000062$$

und $\dfrac{D_7}{D_8}$ gibt den Wert von h wenigstens mit 4 richtigen Dezimalen. Wenn wir von diesen 3 berechnen, sehen wir, dass

$$h < 0{,}524 \text{ ist.}$$

Für den Fehler erhalten wir einen neuen Wert

$$r_9 < (0{,}524)^9 \cdot \frac{0{,}12}{D_8} < 0{,}0000019.$$

Der Näherungswert gibt somit den Wert von h mit einer solchen Genauigkeit, dass die 6. Dezimalstelle höchstens um 2 Einheiten zu klein ist. Wenn wir die Division $\dfrac{D_7}{D_8}$ ausführen, erhalten wir für h und die gesuchte Wurzel den Wert

$$\frac{D_7}{D_8} = 0{,}523597_6.$$

Der richtige Wert ist

$$\frac{\pi}{6} = 0{,}523598_8.$$

9. *Drittes Beispiel.* Wir berechnen die reelle Wurzel der Gleichung $\cos x = x$ oder

$$x - \cos x = 0.$$

Es ist

$$\left|\begin{aligned} f\;\;(x) &= \quad x - \cos x \\ f'\;\;(x) &= \quad 1 + \sin x \\ \tfrac{1}{2!} f''\;\;(x) &= \quad \tfrac{1}{2} \cos x \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} \tfrac{1}{6!} f^{(6)}(x) &= \quad \tfrac{1}{720} \cos x \\ \tfrac{1}{7!} f^{(7)}(x) &= -\tfrac{1}{5040} \sin x \\ \tfrac{1}{8!} f^{(8)}(x) &= -\tfrac{1}{40320} \cos x \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} \tfrac{1}{3!} f'''(x) &= -\tfrac{1}{6} \sin x \\ \tfrac{1}{4!} f^{(4)}(x) &= -\tfrac{1}{24} \cos x \\ \tfrac{1}{5!} f^{(5)}(x) &= \quad \tfrac{1}{120} \sin x \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} \tfrac{1}{9!} f^{(9)}(x) &= \quad \tfrac{1}{9 \cdot 40320} \sin x \\ \tfrac{1}{10!} f^{(10)}(x) &= \quad \tfrac{1}{90 \cdot 40320} \cos x \end{aligned}\right.$$

Wenn wir wieder $a = 0$ als Ausgangswert nehmen, erhalten wir

$$\left|\begin{aligned} f &= -1 \\ f_1 &= \quad 1 \\ f_2 &= \quad \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} f_6 &= \quad \tfrac{1}{720} \\ f_7 &= \quad 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} f_3 &= \quad 0 \\ f_4 &= -\tfrac{1}{24} \\ f_5 &= \quad 0 \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} f_8 &= -\tfrac{1}{40320} \\ f_9 &= \quad 0 \end{aligned}\right.$$

Die 9 ersten Koeffizienten in der Rekursionsformel (13) für D_p sind

$$1, \tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{24}, 0, \tfrac{1}{720}, 0, -\tfrac{1}{40320}, 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
D_0 &= 1 \\
D_1 &= 1 \\
D_2 &= 1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} D_0 = \tfrac{3}{2} \\
D_3 &= 1 \cdot D_2 + \tfrac{1}{2} D_1 = 2 \\
D_4 &= 1 \cdot D_3 + \tfrac{1}{2} D_2 - \tfrac{1}{24} D_0 = \tfrac{65}{24} \\
D_5 &= 1 \cdot D_4 + \tfrac{1}{2} D_3 - \tfrac{1}{24} D_1 = \tfrac{11}{3} \\
D_6 &= 1 \cdot D_5 + \tfrac{1}{2} D_4 - \tfrac{1}{24} D_2 + \tfrac{1}{720} D_0 = \tfrac{3571}{720} \\
D_7 &= 1 \cdot D_6 + \tfrac{1}{2} D_5 - \tfrac{1}{24} D_3 + \tfrac{1}{720} D_1 = \tfrac{302}{45} \\
D_8 &= 1 \cdot D_7 + \tfrac{1}{2} D_6 - \tfrac{1}{24} D_4 + \tfrac{1}{720} D_2 - \tfrac{1}{40320} D_0 = \tfrac{366113}{40320} \\
D_9 &= 1 \cdot D_8 + \tfrac{1}{2} D_7 - \tfrac{1}{24} D_5 + \tfrac{1}{720} D_3 - \tfrac{1}{40320} D_1 = \tfrac{495360}{40320}.
\end{aligned}$$

Wir wollen den Fehler in dem Näherungswert

$$h_a = -f\frac{D_8}{D_9} = \frac{D_8}{D_9} = \frac{366113}{495360}$$

abschätzen und bestimmen zu diesem Zweck die Unterdeterminanten. Es ist wieder

$$A_1 = D_8$$
$$A_2 = f_1\, A_1 - D_9$$

und für $p = 3, \cdots, 9$ haben wir die Rekursionsformel

$$A_p = f_1\, A_{p-1} + f_2\, A_{p-2} + \cdots + f_{p-1}\, A_1 .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
A_1 &= D_8 && = \frac{366\,113}{40\,320}\\
A_2 &= A_1 - D_9 && = -\frac{1292\,47}{40\,320}\\
A_3 &= A_2 + \tfrac{1}{2} A_1 && = \frac{107\,619}{2\cdot 40\,320}\\
A_4 &= A_3 + \tfrac{1}{2} A_2 && = -\frac{21\,628}{2\cdot 40\,320}\\
A_5 &= A_4 + \tfrac{1}{2} A_3 - \tfrac{1}{24} A_1 && = \frac{20\,065}{24\cdot 40\,320}\\
A_6 &= A_5 + \tfrac{1}{2} A_4 - \tfrac{1}{24} A_2 && = \frac{195\,44}{24\cdot 40\,320}\\
A_7 &= A_6 + \tfrac{1}{2} A_5 - \tfrac{1}{24} A_3 + \tfrac{1}{720} A_1 && = -\frac{36\,0877}{720\cdot 40\,320}\\
A_8 &= A_7 + \tfrac{1}{2} A_6 - \tfrac{1}{24} A_4 + \tfrac{1}{720} A_2 && = \frac{127\,456}{720\cdot 40\,320}\\
A_9 &= A_8 + \tfrac{1}{2} A_7 - \tfrac{1}{24} A_5 + \tfrac{1}{720} A_3 - \tfrac{1}{40320} A_1 && = -\frac{1724351}{40\,320\cdot 40\,320}
\end{aligned}$$

Die Kontrollengleichung lautet hier

$$A_9 + \frac{1}{2} A_8 - \frac{1}{24} A_6 + \frac{1}{720} A_4 - \frac{1}{40320} A_2 = 0.$$

Die obigen Werte genügen dieser Gleichung und die Werte der Determinanten sind richtig.

Die Determinante D_9' im Zähler des Ausdruckes von r_{10} ist

$$D_9' = -\frac{172\,4351 \cos \xi_2}{2\cdot 40\,320\cdot 40\,320} - \frac{127\,456 \sin \xi_3}{6\cdot 720\cdot 40\,320} + \frac{360\,877 \cos \xi_4}{24\cdot 720\cdot 40\,320} + \frac{195\,44 \sin \xi_5}{120\cdot 24\cdot 40\,320} +$$
$$\frac{20065 \cos \xi_6}{720\cdot 24\cdot 40\,320} + \frac{21\,628 \sin \xi_7}{5040\cdot 2\cdot 40\,320} - \frac{107\,619 \cos \xi_8}{40\,320\cdot 2\cdot 40\,320} - \frac{129\,247 \sin \xi_9}{9\cdot 40\,320\cdot 40\,320} + \frac{366\,113 \cos \xi_{10}}{90\cdot 40\,320\cdot 40\,320}$$

Wenn wir die Brüche addieren, die positiven Glieder in die eine Gruppe und die negativen in die andere Gruppe nehmen, erhalten wir

$$D'_9 = \frac{75\,784\,170 \cos \xi_4 + 2\,384\,3\,680 \sin \xi_5 + 421\,3650 \cos \xi_6 + 77\,860\,80 \sin \xi_7 + 366\,113 \cos \xi_{10}}{90 \cdot 40\,320 \cdot 40\,320}$$

$$- \frac{77\,595\,795 \cos \xi_2 + 107\,063\,040 \sin \xi_3 + 4\,842\,855 \cos \xi_8 + 1\,292\,470 \sin \xi_9}{90 \cdot 40\,320 \cdot 40\,320}$$

wo die Zahlen ξ zwischen 0 und h liegen. Weil die Funktion $x - \cos x$, die für $x = 0$ negativ ist, für $x = \frac{\pi}{4}$ grösser als $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ d. h. positiv ist, ist der Wert der Wurzel und der Wert von h jedenfalls kleiner als $\frac{\pi}{4}$. Die Werte des *cosinus* in der Formel von D'_9 sind somit zwischen 1 und 0,7 und die Werte des *sinus* zwischen 0 und 0,71. Wir erhalten deswegen

$$D'_9 < \frac{80\,363\,933 + 3162\,9760 \cdot 0{,}71 - 82\,438\,650 \cdot 0{,}7}{90 \cdot 40\,320 \cdot 40\,320} < +\,0{,}00032$$

und

$$D'_9 > \frac{80\,363\,933 \cdot 0{,}7 - 82\,438\,650 - 108\,35551\,0 \cdot 0{,}71}{90 \cdot 40\,320 \cdot 40\,320} > -\,0.00072 .$$

Es ist somit

$$|D'_9| < 0,00072 .$$

Weil in der Formel

$$r_{10} = -h^{10} \frac{D'_9}{D_9}$$

$h < 1$ ist, ist jedenfalls

$$|r_{10}| < \frac{0,00072}{D_9} < 0,00006$$

und der Ausdruck

$$-f \frac{D_8}{D_9} = \frac{D_8}{D_9}$$

gibt für h wenigstens 3 richtige Dezimalstellen. Wenn wir diese ausrechnen, sehen wir, dass

$$h < 0,740$$

ist. Nach der Formel von r_{10} ist

$$|r_{10}| < (0,740)^{10} \cdot \frac{0,00072}{D_9} < 0,0000\,029.$$

Der Näherungswert $\frac{D_8}{D_9}$ gibt also den Wert von h, d. h. den Wert der gesuchten Wurzel, wenigstens mit 5 richtigen Dezimalen, und die 6. Dezimalstelle weicht von der richtigen höchstens um 3 Einheiten ab. Wenn wir die Division $\frac{D_8}{D_9}$ ausführen, erhalten wir für die gesuchte Wurzel

$$0,7390\,85,$$

wo die letzte Stelle sich höchstens um 3 Einheiten von der richtigen unterscheidet. Dieses Resultat haben wir ohne Tafeln und ohne Kenntnis des Wertes von π gewonnen.

10. *Viertes Beispiel.* Als letztes Beispiel betrachten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

deren Koeffizienten reelle oder komplexe Zahlen sind. Es ist

$$\left|\begin{array}{l} f(x) = x^2 + p\,x + q \\ f'(x) = 2\,x + p \\ \frac{1}{2} f''(x) = 1 \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{l} f = a^2 + p\,a + q \\ f_1 = 2\,a + p \\ f_2 = 1. \end{array}\right.$$

Die Rekursionsformel (6) lautet jetzt

$$D_p = f_1\,D_{p-1} - f\,D_{p-2},$$

woraus die Formel

$$\frac{D_p}{D_{p-1}} = f_1 + \frac{-f\,D_{p-2}}{D_{p-1}}$$

folgt. Wir erhalten die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} \frac{-f D_{n-1}}{D_n} = \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f D_{n-2}}{D_{n-1}}} \\ \frac{-f D_{n-2}}{D_{n-1}} = \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f D_{n-3}}{D_{n-2}}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{-f D_1}{D_2} = \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f}{f_1}} \end{array}\right.$$

und hieraus den Satz:

Der Näherungswert

$$h_a = -f\frac{D_{n-1}}{D_n}$$

wird durch den endlichen Kettenbruch mit n Gliedern

$$(20) \qquad h_a = \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f}{f_1 + \cdots + \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f}{f_1}}}}}$$

bestimmt.

Nach dem, was wir von der Konvergenz von h_a wissen, gewinnen wir den Satz:

Ist der Abstand der einen Wurzel der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

von dem Punkte $x = a$ kleiner als der der anderen Wurzel, oder fallen beide Wurzeln zusammen, so erhält man für die erstgenannte Wurzel den periodischen unendlichen Kettenbruch

$$(21) \qquad a + \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f}{f_1 + \cfrac{-f}{f_1 + \cdots}}}.$$

Wählt man als Ausgangspunkt $a = 0$, so dass $f = q$ und $f_1 = p$ ist, erhalten wir den Satz:

Ist die eine Wurzel der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als die andere Wurzel, oder fallen beide Wurzeln zusammen, so wird die dem absoluten Betrage nach kleinere Wurzel durch den periodischen unendlichen Kettenbruch

$$(22) \qquad \cfrac{-q}{p + \cfrac{-q}{p + \cfrac{-q}{p + \cfrac{-q}{p + \cdots}}}}$$

bestimmt[1]. *Sind die Wurzeln absolut genommen gleich gross, ohne dass sie zusammenfallen, so ist der Kettenbruch nicht konvergent.*

Wir bestimmen noch das Korrektionsglied für den n. Näherungswert $\frac{-f D_{n-1}}{D_n}$. Die im Ausdruck des Korrektionsgliedes r_{n+1} befindliche Determinante D'_n ist

$$D'_n = \begin{vmatrix} 0 & 1, & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_1 & 1 & \cdots & 0 \\ & f & f_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdot & f f_1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & f & f_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1},$$

also von den unbestimmten Zahlen $\xi_2, \cdots, \xi_{n+1}$ unabhängig.

Das Korrektionsglied lautet:

$$(23) \qquad r_{n+1} = -(-h)^{n+1} \frac{1}{D_n} = -\frac{(-h)^{n+1}}{D_n}.$$

[1]) Wenn die quadratische Gleichung in der Form $x^2 - Ax - B = 0$ gegeben ist, so erhält man für die absolut genommen *grössere* Wurzel den Kettenbruch $A - \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{-A + \cfrac{B}{-A + \cdots}}}$ oder $A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{A + \cdots}}$. Diesen Satz hat Herr Perron in seinem Lehrbuch „Die Lehre von den Kettenbrüchen", S. 276, in einer anderen Weise bewiesen.

Diese exakte Formel für das Korrektionsglied gilt für die beiden h, konvergiert aber mit $n = \infty$ nur für das dem absoluten Betrage nach kleinere h gegen Null.

Aus dem Gleichungssystem (9) erhält man die Gleichung

$$h^n = \frac{(-f)^n}{D_n} - h^{n+1}\frac{D_{n-1}}{D_n}, \tag{24}$$

die auch für die beiden Wurzeln besteht.

Wir betrachten noch näher den Fall, dass die Koeffizienten der quadratischen Gleichung und der Ausgangswert *a reell* sind, so dass auch f und f_1 reell sind. Ist dann f negativ und f_1 positiv (die Glieder des Kettenbruches sind positiv), so wird das dem absoluten Betrage nach kleinere h positiv. Für diesen Wert h ist nach der letzten Gleichung

$$h^n < \frac{(-f)^n}{D_n}$$

und

$$h^{n+1} < \frac{(-f)^{n+1}}{D_{n+1}}.$$

Nach der obigen exakten Formel für r_{n+1} ist dann

$$|r_{n+1}| < \frac{(-f)^{n+1}}{D_n D_{n+1}} < \frac{(-f)^{n+1}}{D_n^2}, \tag{25}$$

während r_{n+1} selbst für ein gerades n positiv und für ein ungerades n negativ ist.

ÜBER DIE ASYMPTOTISCHEN WERTE DER GANZEN FUNKTIONEN ENDLICHER ORDNUNG

Von

LARS AHLFORS

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A.-G. S A N A

Über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung.

§ 1. Einleitende Übersicht.

1. T. Carleman[1]) hat bekanntlich durch eine interessante Beweismethode gezeigt, dass eine ganze Funktion von endlicher Ordnung nur endlich viele asymptotische Werte besitzt. Sein Beweis liefert für die Anzahl der verschiedenen, endlichen asymptotischen Werte die obere Schranke $\frac{\pi^2}{2} k < 5k$, wobei k die Ordnung der betrachteten Funktion bedeutet.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist zu beweisen, dass diese Anzahl im Einklang mit einer bekannten, von A. Denjoy[2]) ausgesprochenen Vermutung schon $2k$ nicht überschreiten kann[3]).

Andererseits kennt man Funktionen der Ordnung k, welche genau $2k$ endliche, asymptotische Werte aufweisen. Eine solche Funktion ist z. B.

$$F(z) = \int_0^z \frac{\sin(z^k)\, dz}{z^k},$$

die für ganzzahliges $2k$ eindeutig ist. Sie strebt auf den Strahlen

$$\arg z = \nu \cdot \frac{\pi}{k} \quad (\nu = 0, \cdots, 2k-1)$$

---

1) T. Carleman: Sur les fonctions inverses des fonctions entières d'ordre fini (*Arkiv för mat. o. fys.*, t. 15, No. 10, 1921).

2) *Comptes rendus*, t. 145, p. 106, 1907.

3) Den Beweisgang habe ich in einer Note kurz angedeutet (*Comptes rendus*, t. 188, p. 688, 1929).

gegen die Grenzwerte $Ae^{i\nu\cdot\frac{\pi}{k}}$, wo A die von Null verschiedene Konstante

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^k)\,dx}{x^k}$$

bezeichnet.

2. Wie DENJOY gezeigt hat, lässt sich seine Vermutung leicht beweisen, wenn die ganze Funktion gegen ihre endlichen, asymptotischen Werte auf vom Punkte $z = 0$ ausgehenden Halbstrahlen strebt. Um das Wesentliche des nachfolgenden Beweises klar hervortreten zu lassen, empfiehlt es sich, an den Beweis der DENJOYschen Vermutung in diesem einfachen Sonderfall zu erinnern.

Beim Beweise wird wesentlich von dem bekannten PHRAGMÉN-LINDELÖFschen[1]) Prinzip Gebrauch gemacht. In einer für den späteren Beweis des allgemeinen Falles zweckmässigen Form lautet dieses Prinzip wie folgt:

Es sei $\varphi(\zeta)$ eine in der oberen ζ-Halbebene reguläre, analytische Funktion, die auf der reellen Achse stetig ist und hier Werte annimmt, die dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Schranke C liegen.

Wenn es eine Folge von gegen den unendlich fernen Punkt $\zeta = \infty$ konvergierenden Kurven gibt, die innerhalb der oberen Halbebene die positive und negative Achse verbinden, und auf denen

$$\log|\varphi(\zeta)| < |\zeta|^{1-\varepsilon},$$

wo ε eine von ζ unabhängige, positive Zahl bedeutet, so gilt in der ganzen Halbebene

$$|\varphi(\zeta)| \leq C.$$

Der Beweis des von DENJOY betrachteten Spezialfalles ergibt sich sofort, wenn man das soeben erwähnte Prinzip mit dem folgenden, zuerst von LINDELÖF[2]) bewiesenen Satz verbindet:

---

[1]) E. PHRAGMÉN-E. LINDELÖF: Sur une extension d'un principe classique de l'analyse (*Acta Math.*, t. 31, p. 381.).

[2]) E. LINDELÖF: Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel (*Acta Soc. Fenn.*, t. 35, 1908).

Wenn eine analytische Funktion im Inneren eines Winkels regulär ist und auf den Schenkeln gegen verschiedene Grenzwerte strebt, so nimmt sie im Inneren des Winkels beliebig grosse Werte an.

In der Tat, sei k die Ordnung der ganzen Funktion $f(z)$. Wäre die Anzahl n der endlichen asymptotischen Werte, die zu vom Punkte $z = 0$ ausgehenden Halbstrahlen gehören, grösser als $2k$, so gäbe es unter diesen Halbstrahlen zwei, die einen Winkel $\alpha < \frac{\pi}{k}$ einschlössen. Unter geeigneter Wahl von ω bildet die Funktion $\zeta = e^{i\omega} z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ diesen Winkel auf die obere Halbebene konform ab.

Die zusammengesetzte Funktion $\varphi(\zeta) = f\left([e^{-i\omega}\zeta]^{\frac{\alpha}{\pi}}\right)$ strebt in den beiden Richtungen der reellen Achse gegen bestimmte, endliche Grenzwerte. Also ist die Funktion beschränkt auf der reellen Achse. Da die Grenzwerte nach Voraussetzung verschieden sind, so folgt nach dem soeben zitierten Satz, dass die Funktion nicht in der ganzen Halbebene beschränkt sein kann.

Wir wählen jetzt ein k', so dass $k < k' < \frac{\pi}{\alpha}$. Da die Funktion $f(z)$ von der Ordnung k ist, so wird für alle genügend grosse $|\zeta|$

$$\log |\varphi(\zeta)| < |\zeta|^{\frac{\alpha}{\pi} \cdot k'}.$$

Hier ist der Exponent kleiner als 1; also können wir nach dem Phragmén-Lindelöfschen Prinzip schliessen, dass $\varphi(\zeta)$ in der ganzen Halbebene unterhalb derselben endlichen Schranke liegt wie auf der reellen Achse, was soeben als unmöglich erkannt wurde. Der Widerspruch zeigt, dass n nicht grösser als $2k$ sein kann, w. z. b. w.

§ 2. Zurückführung der Denjoyschen Vermutung auf den Beweis eines Hilfssatzes über konforme Abbildung.

3. Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Fall über, wo die Konvergenzwege, d. h. die Wege, auf denen die Funktion gegen

ihre asymptotischen Werte strebt, beliebige stetige Kurven sind. Es wird angenommen, dass die gegebene ganze Funktion der Ordnung k mehr als $2k$ verschiedene, endliche asymptotische Werte hat, und es gilt zu zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Unter den entsprechenden Konvergenzwegen greifen wir eine endliche Anzahl $n > 2k$ heraus. Diese Wege können zunächst durch einfache Polygonzüge ersetzt werden, deren Ecken sich nicht im Endlichen häufen, und auf denen die Funktion dieselben asymptotischen Werte hat[1]. Danach kann man um den Nullpunkt einen so grossen Kreis schlagen, dass er alle eventuell vorhandenen Schnittpunkte der Wege enthält. Wird nun das Anfangsstück jedes Weges durch den Radius zum letzten Schnittpunkt des Weges mit dem Kreise ersetzt, so hat man n vom Nullpunkt ausgehende Konvergenzwege, welche ausser dem Anfangspunkte keine gemeinsamen Punkte besitzen. Sie zerlegen die Ebene in n einfach zusammenhängende Gebiete $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$.

In genauer Analogie mit dem Verfahren, das in dem schon erledigten Spezialfall zum Ziel führte (No. 2), werden wir nun, in einer sofort näher anzugebenden Weise, die Gebiete $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ auf eine Halbebene konform abbilden, um dann unter Anwendung des PHRAGMÉN-LINDELÖFschen Prinzips zu einem Widerspruch zu kommen[2].

---

[1]) Auf dem Konvergenzwege wähle man eine gegen ∞ konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, \cdots$. Zu jedem Kurvenstück (z_n, z_{n+1}) bestimme man dann eine Zahl δ_n derart, dass $|f(z) - f(z')| < \frac{1}{n}$ ist, wenn z auf dem Kurvenstück liegt und $|z - z'| < \delta_n$. Man verbinde z_n und z_{n+1} durch ein Polygon mit endlicher Seitenanzahl, dessen grösste Entfernung vom Kurvenstück kleiner als δ_n ist. Werden alle diese Polygone zusammengefügt und die geschlossenen Teilpolygone weggelassen, so entsteht ein Konvergenzweg der verlangten Art.

[2]) Vergl. BIERNACKI, *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 916, wo die DENJOYsche Vermutung unter Verwendung desselben Gedankenganges für gewisse Sonderfälle bewiesen wird.

Die Funktion $z = z_\nu(\zeta)$, durch welche die konforme Abbildung der oberen ζ-Halbebene auf das Gebiet Ω_ν geleistet wird, ist laut einem bekannten Satz stetig bis auf den Rand. Man kann sie also so wählen, dass die Randpunkte $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ in $z = 0$ bzw. $z = \infty$ übergehen. Dadurch ist die Funktion bis auf einen positiven, konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Für das Folgende ist nur wesentlich, dass dieser Faktor einen *festen* Wert erhält.

Man betrachte dann die in der oberen Halbebene definierten, zusammengesetzten Funktionen

$$f(z_\nu(\zeta)) = \varphi_\nu(\zeta).$$

Wenn ζ längs der positiven oder negativen reellen Achse gegen Unendlich rückt, so strebt $\varphi_\nu(\zeta)$ nach der Voraussetzung gegen endliche Grenzwerte. Da diese Grenzwerte ferner von einander *verschieden* sind, so schliesst man nach dem Lindelöfschen Satze auf S. 5, *dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta)$ in der oberen Halbebene nicht beschränkt ist.*

Jetzt müssen wir noch die Voraussetzung beachten, dass $f(z)$ von der Ordnung k ist. Bezeichnet ε eine positive Zahl, so genügt $\varphi_\nu(\zeta)$ also der Ungleichung

$$|\varphi_\nu(\zeta)| = |f(z_\nu(\zeta))| \leqq e^{|z_\nu(\zeta)|^{k+\varepsilon}},$$

sobald $|z_\nu|$ eine gewisse Schranke r überschreitet. Wegen der Stetigkeit der Abbildung am Rande strebt aber die Funktion $z_\nu(\zeta)$ mit ζ gleichmässig gegen Unendlich. Es existiert demnach eine so grosse Zahl ϱ_ε, *dass die obige Ungleichung für jedes $|\zeta| > \varrho_\varepsilon$ besteht.*

Für einen Augenblick nehmen wir nun an, dass die Abbildungsfunktion $z_\nu(\zeta)$ folgender Bedingung genügt:

Wie klein auch die positive Zahl δ gewählt wird, so existiert in der oberen Halbebene eine gegen $\zeta = \infty$ strebende Folge von Kurvenbögen Γ_i $(i = 1, 2 \cdots)$, welche die positive und negative reelle Achse verbinden, so dass

$$(1) \qquad |z_\nu(\zeta)| < |\zeta|^{\frac{2}{n}+\delta} \quad \text{auf } \Gamma_i \; (i = 1, 2, \cdots).$$

Auf Γ_i gilt dann von einem gewissen Index i_0 an

$$\log |\varphi_\nu(\zeta)| < |\zeta|^{(k+\varepsilon)\left(\frac{2}{n}+\delta\right)}.$$

Hat man nun ε und δ so klein gewählt, *dass der Exponent kleiner als 1 ist*, was wegen der Voraussetzung $n > 2k$ möglich ist, so ergibt die Anwendung des PHRAGMÉN-LINDELÖFschen Prinzips, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta)$, die auf der reellen Achse unter einer endlichen Schranke liegt, in der ganzen Halbebene beschränkt ist, im Widerspruch mit dem obigen Ergebnis.

Der Beweis der DENJOYschen Vermutung ist somit auf den Nachweis folgender Behauptung zurückgeführt:

Unter den Funktionen $z_\nu(\zeta)$ $(\nu = 1, \cdots n)$, *welche die obere Halbebene auf die von den betrachteten* n *Konvergenzwegen begrenzten Gebiete* Ω_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ *konform abbilden, besitzt wenigstens eine die durch* (1) *ausgedrückte Eigenschaft.*

Dieser Hilfssatz wird als Folgerung eines allgemeinen Satzes über das Verhalten der konformen Abbildung in der Nähe eines Randpunktes hervorgehen.

§ 3. Beweis eines Satzes über konforme Abbildung.

4. In dieser Nummer werden wir einen von den obigen Betrachtungen unabhängigen Satz über das Verhalten einer konformen Abbildung in der Umgebung eines Randpunktes herleiten, als dessen unmittelbare Anwendung der Beweis der DENJOYschen Vermutung dann gewonnen werden kann.

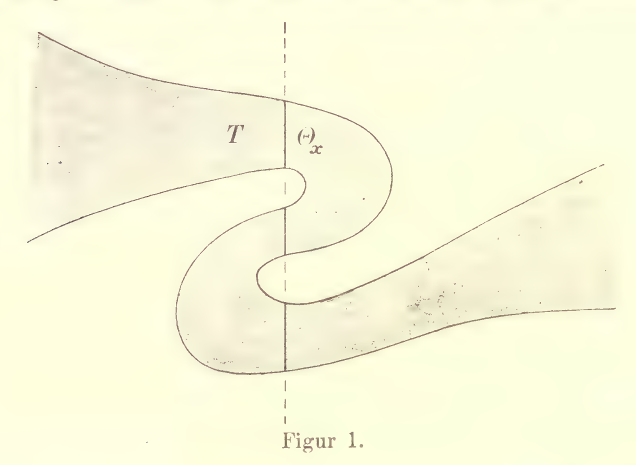
In der $s = x + iy$-Ebene sei T ein Gebiet, das von zwei sich nicht schneidenden, von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ laufenden Kurven begrenzt wird, deren jedes endliche Stück aus einer endlichen Anzahl analytischer Bögen besteht. Auf jeder Parallelen zur y-Achse liegen ein oder mehrere, aber immer nur endlich viele Querschnitte des Gebietes T, die die beiden Randkurven verbinden. Denjenigen der zur Abszisse x gehörigen Querschnitte, der durch alle übrigen vom Punkte $x = +\infty$ getrennt wird, bezeichne ich mit

Θ_x; seine Länge sei $\Theta(x)$ (Fig. 1). Unter den über den Rand von T gemachten Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass $\Theta(x)$ eine bis auf isolierte Sprünge stetige Funktion ist.

Das Gebiet T werde durch Vermittlung der Funktion

$$\sigma(s) = \xi(s) + i\,\eta(s)$$

auf den Streifen $0 < \eta < 1$ konform abgebildet, wobei $x = -\infty$ in $\xi = -\infty$ und $x = +\infty$ in $\xi = +\infty$ übergehen sollen. Das Bild des Querschnitts Θ_x ist eine Kurve γ_x, die die beiden Ufer



Figur 1.

des Parallelstreifens verbindet. Die kleinste Abszisse eines auf γ_x gelegenen Punktes sei $\xi(x)$. Der in Aussicht gestellte Satz enthält eine Abschätzung dieser Grösse.

Satz: *Unter den obigen Voraussetzungen existiert eine Zahl x_0, so dass für alle $x_1 > x_0$*

$$\xi(x_1) > \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\Theta(x)}. \tag{2}$$

Beweis: Da $\xi(x)$ mit x gegen Unendlich strebt, kann ich eine Zahl x_0 finden, so dass $\xi(x_0) > 2$. Ich behaupte, dass (2) für diese Wahl von x_0 richtig ist.

Mit $\omega(x)$ bezeichne ich die Schwankung von $\xi(s)$ auf dem Querschnitt Θ_x. Die Länge der Kurve γ_x ist wenigstens gleich

der Diagonale des Rechtecks $ABCD$ (Fig. 2) mit den Seiten 1 und $\omega(x)$, in das sie eingeschrieben ist.

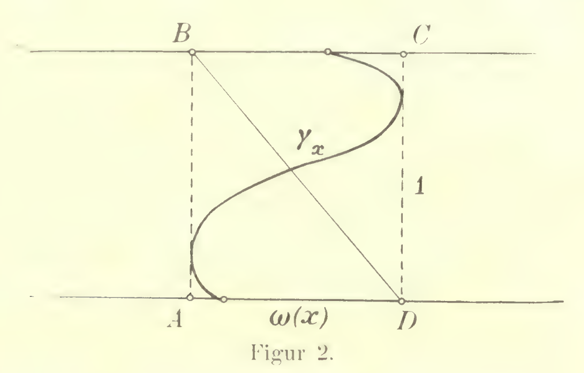
Also gilt

$$1 + \omega(x)^2 \leqq \left(\int_{\Theta_x} |\sigma'(s)|\, dy\right)^2.$$

Wenden wir rechts die SCHWARZsche Ungleichung an, so wird

$$1 + \omega(x)^2 \leqq \int_{\Theta_x} dy \int_{\Theta_x} |\sigma'(s)|^2\, dy = \Theta(x) \cdot \int_{\Theta_x} |\sigma'|^2\, dy.$$

Wir dividieren nun beiderseits durch $\Theta(x)$ und integrieren in bezug auf x zwischen den Grenzen x_0 und x_1 ($> x_0$)[1]. Es wird



Figur 2.

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\omega^2}{\Theta}\, dx \leqq \int_{x_0}^{x_1}\int_{\Theta_x} |\sigma'|^2\, dx\, dy.$$

Das rechtsstehende Integral stellt den Inhalt einer Fläche dar, welche ganz in dem Rechteck $2 \leqq \xi \leqq \xi(x_1) + \omega(x_1)$, $0 \leqq y \leqq 1$ liegt. Ersetzt man diesen Inhalt durch die Fläche des Rechtecks, so wird nach (3)

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\omega^2}{\Theta}\, dx < \xi(x_1) + \omega(x_1) - 2$$

oder

[1]) Die Funktion $\Theta(x)$ ist integrierbar, weil sie nur isolierte Unstetigkeitspunkte hat, $\omega(x)$ weil sie die Differenz von zwei wachsenden Funktionen ist. Denn sowohl das Maximum als das Minimum von $\xi(s)$ auf Θ_x wachsen ja mit x.

(4) $$\xi(x_1) > \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} + h(x_1),$$

wo

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\omega^2}{\Theta} dx - \omega(x) + 2.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle, je nachdem $h(x_1) \geqq 1$ oder $h(x_1) < 1$ ist.

Im ersten Fall folgt die Richtigkeit der Ungleichung (2) unmittelbar aus (4).

Im zweiten Fall ist die Behauptung (2) ebenfalls evident, wenn das Integral rechts in (2) nicht grösser als Eins ist; denn es ist $\xi(x_1) > \xi(x_0) > 2$. Ist wiederum das Integral grösser als Eins, so existiert eine Zahl x' des Intervalles $x_0 < x' < x_1$ derart, dass

(5) $$\int_{x'}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} = 1.$$

In diesem Fall führt folgende Überlegung zum Ziel.

Ich behaupte, dass $h(x)$ nicht im ganzen Intervall (x', x_1) kleiner als 1 sein kann. Aus $h(x) < 1$ folgt nämlich

$$1 + \int_{x_0}^{x} \frac{\omega^2}{\Theta} dx < \omega(x),$$

und mit der Bezeichnung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\omega^2}{\Theta} dx = a(x)$$

erhält man für $a(x)$ die Differentialungleichung

$$(1 + a)^2 < \Theta \frac{da}{dx};$$

oder also

$$\frac{dx}{\Theta} < \frac{da}{(1+a)^2} = d\left(-\frac{1}{1+a}\right).$$

Wäre diese Ungleichung im ganzen Intervall (x', x_1) gültig, so hätte man

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} < \int_{x'}^{x_1} d\left(-\frac{1}{1+a}\right) = \frac{1}{1+a(x')} - \frac{1}{1+a(x_1)}.$$

Beachtet man, dass $a(x)$ für $x \geqq x_0$ eine nichtnegative Funktion ist, so folgt

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} < 1,$$

im Widerspruch mit (5). Wir schliessen hieraus, dass in dem betrachteten Intervall wenigstens ein Wert X liegt, so dass $h(X) \geqq 1$ ist.

Die Ungleichung (4) ergibt nun, wenn x_1 mit X ersetzt wird,

$$\xi(X) > \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\Theta} + h(X) \geqq \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\Theta} + 1.$$

Wegen $x_1 > X$ ist auch $\xi(x_1) > \xi(X)$, und man findet

$$\xi(x_1) > \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\Theta} + 1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} + \left(1 - \int_{X}^{x_1} \frac{dx}{\Theta}\right).$$

Es ist ferner

$$\int_{X}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} \leqq \int_{x'}^{x_1} \frac{dx}{\Theta} = 1,$$

so dass wieder

$$\xi(x_1) > \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\Theta}$$

wird. Hiermit ist die Ungleichung (2) für alle $x_1 > x_0$ bewiesen.

§ 4. Zuendeführung des Beweises der Denjoyschen Vermutung.

5. Wir haben jetzt noch den am Ende von § 2 ausgesprochenen Hilfssatz als Folgerung des soeben hergeleiteten Satzes zu beweisen und machen dabei von einer einfachen Überlegung Gebrauch, die schon von Carleman[1]) in seinem Beweise verwendet wurde.

In dem Hilfssatze hatte man die n Funktionen $z_\nu(\zeta)$ ($\nu = 1, 2, \cdots, n$) zu betrachten, durch welche die obere ζ-Halbebene auf je eines der von den n Konvergenzwegen begrenzten Gebiete Ω_ν konform abgebildet wurde. Schreibt man $\log \zeta = \pi \sigma$, so hat man, wenn der Zweig des Logarithmus zweckmässig gewählt wird, in $s = s_\nu(\sigma) = \log z_\nu(e^{\pi\sigma})$ eine Funktion, welche den Parallelstreifen $0 < \eta < 1$ ($\sigma = \xi + i\eta$) auf ein Gebiet T_ν der s-Ebene abbildet, das denselben Bedingungen genügt wie das im vorigen Paragraphen betrachtete Gebiet T.

Alle früher für das Gebiet T definierte Grössen werden jetzt auch für T_ν erklärt und durch einen angehängten Index ν gekennzeichnet. Die Grössen $\Theta_\nu(x)$ erfüllen für jedes x die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Theta_\nu(x) \leqq 2\pi.$$

Es sei jetzt x_0 die grösste der Zahlen $x_0^{(\nu)}$ (vgl. S. 9). Nach dem oben bewiesenen Satz gilt dann, sobald $x > x_0$,

$$\xi_\nu(x) > \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\Theta_\nu(x)}$$

für $\nu = 1, 2, \cdots, n$; es ist also auch

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(x) > \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{n}\sum \frac{1}{\Theta_\nu}\right) dx.$$

---

[1]) Loc. cit.

Nach dem bekannten Satze vom arithmetischen und harmonischen Mittel gilt aber

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\Theta_\nu} \geqq \frac{n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\Theta_\nu} \geqq \frac{n}{2\pi},$$

und es wird folglich

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu(x) > \frac{n}{2\pi}\int_{x_0}^{x} dx = \frac{n}{2\pi}(x - x_0).$$

Hieraus schliesst man, dass für wenigstens einen Index ν die Ungleichung

$$\xi_\nu(x) > \frac{n}{2\pi}(x - x_0)$$

oder

$$x < x_0 + \frac{2\pi\,\xi_\nu(x)}{n} \tag{6}$$

unendlich oft gilt, wenn x eine beliebig vorgegebene, ins Unendliche wachsende Wertfolge $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$ durchläuft.

Geht man nun zu der ζ-Halbebene über, so gibt $e^{\pi\xi_\nu(x)}$ den kleinsten Abstand vom Nullpunkte zu derjenigen Kurve $\Gamma_x^{(\nu)}$ an, die als Bild der Kurve $\gamma_x^{(\nu)}$ (vgl. S. 9) erscheint. Ich behaupte, *dass die Kurven* $\Gamma_x^{(\nu)}$, *die zu denjenigen Werten* x *gehören, für welche* (6) *gilt, ein System von der im Hilfssatze S. 7 angegebenen Art bilden.*

In der Tat verbinden diese Kurven die positive und negative reelle Achse, und mit unbeschränkt wachsendem x konvergieren sie auch gegen Unendlich. Ferner ist in jedem Punkte ζ der Kurve $\Gamma_x^{(\nu)}$

$$|z_\nu(\zeta)| = e^x$$

und somit, gemäss (6),

$$|z_\nu(\zeta)| < e^{x_0}\cdot\left(e^{\pi\xi_\nu(x)}\right)^{\frac{2}{n}} \leqq e^{x_0}\cdot|\zeta|^{\frac{2}{n}}.$$

Wenn $\delta > 0$, so gilt also auf den Kurven des betrachteten Systems

$$|z_\nu(\zeta)| < |\zeta|^{\frac{2}{n}+\delta},$$

sobald $|\zeta| > e^{\frac{x_0}{\delta}}$ ist, w. z. b. w.

ÜBER BESCHRÄNKTE ANALYTISCHE FUNKTIONEN

Von

ROLF NEVANLINNA

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A.-G. SANA

Einleitung.

1. Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit folgendem Problem:

1:o. *Unter welchen Bedingungen existiert eine im Einheitskreise* $|z| < 1$ *reguläre Funktion* $w = w(z)$, *deren Werte in den Einheitskreis* $|w| \leqq 1$ *fallen und die in vorgegebenen Punkten*

$$z_1, z_2, \cdots$$

vorgeschriebene Werte

$$w_1, w_2, \cdots$$

annehmen?

2:o. *Wann ist die Funktion* w *durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt?*

3:o. *Welches ist die Gesamtheit der Funktionen* w, *die den unter* 1:o *angegebenen Bedingungen genügen?*

Als Grenzfälle sind hierin verschiedene bekannte Probleme mitenthalten. Denkt man sich die gegebenen Punkte z_ν im Nullpunkte zusammengefallen, so gelangt man zu dem CARATHÉODORYschen Koeffizientenproblem einer beschränkten Potenzreihe. Wenn die gegebenen Punkte z_ν, w_ν auf der Peripherie des Einheitskreises liegen, so wird man in natürlicher Weise zur Untersuchung derjenigen Funktionsklasse geführt, welche von allen im Einheitskreise beschränkten Funktionen gebildet wird, die in den Randpunkten z_ν die Randwerte w_ν mit vorgeschriebenen Werten der Ableitung annehmen. Fallen schliesslich alle Punkte z_ν in einem Randpunkt zusammen, so besteht die zu untersuchende Klasse aus denjenigen beschränkten Funktionen, welche in diesem Rand-

punkte eine vorgeschriebene asymptotische Potenzreihenentwicklung haben.

Das allgemeine Interpolationsproblem wurde im Falle einer endlichen Anzahl von Wertzuordnungen zuerst von Herrn PICK [1]) aufgestellt und gelöst. Mittels einer anderen Methode haben wir später die Frage behandelt und weiter geführt [2]). Eine vollständige Lösung ergab sich in dem soeben erwähnten Grenzfall, wo eine asymptotische Entwicklung der beschränkten Funktion gegeben ist. Es zeigte sich gleichzeitig, dass dieser Grenzfall äquivalent mit dem STIELTJESschen Momentenproblem ist, welches hierdurch eine neue und vollständige Lösung erhielt.

In diesen Untersuchungen benutzten wir eine von Herrn I. SCHUR [3]) zur Lösung des CARATHÉODORYschen Koeffizientenproblems angewandte elementare Methode, welche wesentlich auf wiederholte Verwendung des SCHWARZschen Lemmas gegründet ist; in den oben genannten Grenzfällen tritt an die Stelle dieses Lemmas die von Herrn JULIA gegebene Erweiterung desselben.

Dieses Verfahren hat durch eine spätere, zusätzliche Bemerkung von Herrn DENJOY wesentlich an Einheitlichkeit gewonnen [4]). Die DENJOYsche Modifikation führte zu einer allgemeinen Lösung der unter 2:o gestellten Eindeutigkeitsfrage, sowohl im allgemeinen Fall wie in den Grenzfällen.

Das DENJOYsche Ergebnis und eine Untersuchung von Herrn

---

[1]) G. PICK: *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden* (Math. Ann., B. 77, S. 7—23, 1916).

[2]) *Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen* (Ann. Acad. Scient. Fenn., B. XV, 1919); *Kriterien über die Randwerte beschränkter Funktionen* (Math. Zeitschrift, B. 13, 1922); *Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das STIELTJESche Momentenproblem* (Ann. Acad. Scient. Fenn., B. XVIII, 1922).

[3]) I. SCHUR: *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind* (Journal für Mathematik, B. 147, S. 205—232, B. 148, S. 122—145, 1918).

[4]) A. DENJOY: *Sur une classe de fonctions analytiques* (Comptes rendus, t. 188, 1929, p. 140 u. 1084).

Carathéodory über die Winkelderivierten beschränkter Funktionen [1]) haben uns veranlasst, das Interpolationsproblem wieder aufzunehmen. Auf der Grundlage der neuesten Fortschritte ist es möglich das Problem vollständig und einheitlich zu erledigen, so dass die Lösung in den Grenzfällen sich als Sonderfälle in die allgemeine Lösung einordnet.

2. Die vorliegende Arbeit ist in drei Abschnitte eingeteilt. Der erste Abschnitt ist dem Schwarzschen Lemma und seinen von den Herren Julia und Löwner gegebenen Erweiterungen gewidmet. Wegen der grossen Bedeutung dieser einfachen Sätze für verschiedene funktionentheoretische Fragen haben wir sie vollständiger behandelt, als für die besonderen Zwecke der nachfolgenden Untersuchung nötig gewesen wäre.

Im zweiten Abschnitt wird das Interpolationsproblem vollständig gelöst [2]), und im dritten Abschnitt findet man eine kurze Darstellung verschiedener Grenzfälle.

---

[1]) C. Carathéodory: *Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen* (Ber. der preuss. Akad. der Wiss., 1929, B. 32, S. 39—54).

[2]) Da wir eine vollständige Darstellung der in Frage stehenden elementaren Methode anstreben, können hierbei Wiederholungen von bekannten Sachen nicht vermieden werden. — Einen Teil der Ergebnisse, welche als neu zu betrachten sind, haben wir in einer Note veröffentlicht (*Sur un problème d'interpolation*, Comptes rendus, t. 188, 1929, p. 1224).

I. Das SCHWARZsche Lemma und seine Erweiterungen.

§ 1. Über lineare Transformationen, welche den Einheitskreis invariant lassen.

3. In diesem Paragraphen werden einige bekannte Eigenschaften der linearen Transformationen zusammengestellt, in einer Form, die für die nachfolgende Untersuchung zweckmässig ist.

Die allgemeinste lineare Transformation, welche den Kreis $|z| < 1$ in den Kreis $|w| < 1$ führt, so dass die inneren Punkte $z = ae^{ia}$ $(0 < a < 1)$ und $w = be^{i\beta}$ $(0 \leqq b < 1)$ einander entsprechen, kann in folgender Form geschrieben werden:

$$(1) \qquad \frac{b - we^{-i\beta}}{1 - bwe^{-i\beta}} = e^{i\gamma} \frac{a - ze^{-ia}}{1 - aze^{-ia}},$$

wo γ ein reeller Parameter ist. Die links und rechts stehenden, linear gebrochenen Ausdrücke bilden den Einheitskreis auf sich selbst ab, so dass der Punkt $w = be^{i\beta}$ bzw. $z = ae^{ia}$ in den Nullpunkt übergeht. Lässt man, nach Division beiderseits mit $a - ze^{-ia}$, den Punkt z gegen ae^{ia} rücken, so folgt, dass für $z = ae^{ia}$

$$(1)' \qquad \left(\frac{dw}{dz}\right) = e^{i(\gamma + \beta - a)} \frac{1 - b^2}{1 - a^2}.$$

4. Betrachten wir nun eine Transformation, die ebenfalls den Einheitskreis invariant lässt, die aber zwei gegebene *Randpunkte* $z_0 = e^{ia_0}$ und $w_0 = e^{i\beta_0}$ in einander führt. Statt ihren allgemeinen Ausdruck ohne weiteres hinzuschreiben, wollen wir diesen durch einen Grenzübergang aus (1) herleiten.

Wir bezeichnen die gesuchte Transformation mit $w = w(z)$ und setzen, unter a eine beliebige Zahl des Intervalles $0 \leqq a < 1$ ver-

standen, $w(ae^{i\alpha_0}) = be^{i\beta}$. Nach (1) existiert dann eine reelle Zahl γ derart, dass

$$\frac{b - we^{-i\beta}}{1 - bwe^{-i\beta}} = e^{i\gamma}\frac{a - ze^{-i\alpha_0}}{1 - aze^{-i\alpha_0}},$$

eine Identität, die nach einer leichten Umformung auch in der Form

$$(2) \quad \frac{(1-b)(1+we^{-i\beta})}{1 - bwe^{-i\beta}} = \frac{(1-a)(1+ze^{-i\alpha_0})}{1 - aze^{-i\alpha_0}} + (1-e^{i\gamma})\frac{a - ze^{-i\alpha_0}}{1 - aze^{-i\alpha_0}}$$

geschrieben werden kann.

Wir lassen nun a gegen Eins rücken und beachten hierbei folgendes. Setzt man $w'(z_0) = \lambda e^{i\vartheta}$, so ist $\vartheta = \beta_0 - \alpha_0$, da die Linienelemente dw und dz, die in den Punkten w_0, z_0 einander entsprechen, offenbar den Winkel $\beta_0 - \alpha_0$ einschliessen. Bezeichnet man die Normalableitung $\frac{\partial}{\partial r}\arg w'$ $(z = re^{i\varphi})$ im Punkte z_0 mit μ, so ist somit

$$\arg w'(ae^{i\alpha_0}) = \beta_0 - \alpha_0 + \mu(a-1)(1+\varepsilon),$$

wo ε für $a = 1$ verschwindet. Andererseits ist nach (1)′

$$\arg w'(ae^{i\alpha_0}) = \gamma + \beta - \alpha_0, \quad |w'(ae^{i\alpha_0})| = \frac{1 - b^2}{1 - a^2},$$

und es gilt also, da $(\beta - \beta_0):(1-a) \to 0$ für $a \to 1$,

$$\lim_{a=1}\frac{1-b^2}{1-a^2} = \lim_{a=1}\frac{1-b}{1-a} = \lambda, \quad \lim_{a=1}\frac{1-e^{i\gamma}}{1-a} = i\mu.$$

Für $a \to 1$ ergibt sich nun aus (2)

$$(3) \qquad \lambda\frac{1 + we^{-i\beta_0}}{1 - we^{-i\beta_0}} = \frac{1 + ze^{-i\alpha_0}}{1 - ze^{-i\alpha_0}} + i\mu,$$

wo also

$$(3)' \quad \lambda = |w'(e^{i\alpha_0})| \text{ und } \mu = \frac{\partial}{\partial r}\arg w'(e^{i\alpha_0}) = -\frac{\partial}{\partial \alpha_0}\log|w'(e^{i\alpha_0})|.$$

Umgekehrt sieht man leicht ein, dass jede Transformation (3), wo λ eine beliebige positive und μ eine beliebige reelle Zahl bezeichnen, den Einheitskreis invariant lässt und die Randpunkte $w_0 = e^{i\beta_0}$, $z_0 = e^{i\alpha_0}$ in einander führt. Es genügt zu bemerken, dass die Ausdrücke auf der linken und der rechten Seite den Einheits-

kreis $|w| \leqq 1$ bzw. $|z| \leqq 1$ in die Halbebene der positiven Realteile transformieren, wobei die gegebenen Randpunkte w_0 und z_0 dem unendlich fernen Punkt entsprechen.

Wir bemerken noch, dass die Formel (3) wegen (3)′ sich in nachstehender Form schreiben lässt (wir ersetzen hierbei α_0, β_0 durch α, β)

$$(4) \qquad \frac{1+we^{-i\beta}}{1-we^{-i\beta}}\,d\beta = \frac{1+ze^{-i\alpha}}{1-ze^{-i\alpha}}\,d\alpha - i\,d\log|w'(e^{i\alpha})|,$$

oder, wenn man nur die reellen Teile berücksichtigt,

$$(4)' \qquad \frac{1-|w|^2}{|e^{i\beta}-w|^2}\,d\beta = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\alpha}-z|^2}\,d\alpha.$$

5. Durch Integration von (4) erhält man den allgemeinen Ausdruck einer linearen Transformation, welche den Einheitskreis in sich und zwei gegebene Randpunkte $z_1 = e^{i\alpha_1}$, $z_2 = e^{i\alpha_2}$ $(0 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi)$ in zwei beliebig vorgeschriebene Randpunkte $w_1 = e^{i\beta_1}$, $w_2 = e^{i\beta_2}$ $(0 < \beta_2 - \beta_1 < 2\pi)$ führt. Bezeichnet nämlich $w = w(z)$ eine Transformation dieser Art, so wird nach (4)

$$(4)'' \qquad \frac{2}{i}\log\frac{1-we^{-i\beta_2}}{1-we^{-i\beta_1}} + \beta_2 - \beta_1 = \frac{2}{i}\log\frac{1-ze^{-i\alpha_2}}{1-ze^{-i\alpha_1}} + \alpha_2 - \alpha_1 - i\log\left|\frac{w'(e^{i\alpha_2})}{w'(e^{i\alpha_1})}\right|$$

und also

$$(5) \qquad \frac{1-we^{-i\beta_2}}{1-we^{-i\beta_1}}\,e^{i\frac{\beta_2-\beta_1}{2}} = K\,\frac{1-ze^{-i\alpha_2}}{1-ze^{-i\alpha_1}}\,e^{i\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}},$$

wo

$$K^2 = \left|\frac{w'(e^{i\alpha_2})}{w'(e^{i\alpha_1})}\right|.$$

Setzt man umgekehrt in (5) für K eine willkürliche positive Konstante ein, so stellt die Formel (5) eine Transformation der erwünschten Art dar. Um dies einzusehen bemerke man, dass die links und rechts stehenden linearen Funktionen von w und z den Einheitskreis auf die Halbebene der positiven Imaginärteile abbilden derart, dass die Punkte $e^{i\beta_1}$, $e^{i\beta_2}$ bzw. $e^{i\alpha_1}$, $e^{i\alpha_2}$ in $0, \infty$ transformiert werden.

6. Es geht aus den Beziehungen (1)′ und (4)′ hervor, dass die Differentialausdrücke

$$(6) \qquad ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2} \quad \text{und} \quad d\omega = \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-i\alpha}|^2}\,d\alpha$$

gegenüber linearen Transformationen, welche den Einheitskreis in sich führen, invariant sind. Auf diese Invarianten gründet sich bekanntlich die POINCARÉsche Deutung des Inneren des Einheitskreises als die hyperbolische Ebene. Der erste der Ausdrücke (6) wird als *Linienelement* definiert; als kürzeste Linien erscheinen dann die zu dem Einheitskreis orthogonalen Kreise, und die Entfernung zwischen zwei Punkten u und v wird gleich

$$[u, v] = \frac{1}{2} \log \frac{|1-u\bar{v}| + |u-v|}{|1-u\bar{v}| - |u-v|}.$$

Vermöge der Transformation (1) entspricht der Schar derjenigen Kreise, welche die den Punkt $ae^{i\alpha}$ und den Spiegelpunkt $\frac{e^{i\alpha}}{a}$ verbindenden Kreisbögen orthogonal schneiden, die analoge Kreisschar mit $be^{i\beta}$ und $\frac{e^{i\beta}}{b}$ als Grenzpunkten. Diese Kreise stellen nichteuklidisch gedeutet ebenfalls Kreise oder *Zykel* dar, mit $ae^{i\alpha}$ bzw. $be^{i\beta}$ als Mittelpunkten. Wenn der Punkt z den Zykel

$$\left|\frac{a-ze^{-i\alpha}}{1-aze^{-i\alpha}}\right| = r \ (0 \leqq r < 1)$$

mit dem nichteuklidischen Radius

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}$$

einmal durchläuft, so beschreibt vermöge (1) der Bildpunkt w den kongruenten Zykel

$$\left|\frac{b-we^{-i\beta}}{1-bwe^{-i\beta}}\right| = r.$$

Dieselbe Bewegung führt w aus, wenn man z in einem Punkt der Peripherie des obigen Zykels festhält und den Parameter γ von 0 bis 2π variieren lässt.

7. Die zweite der Differentialinvarianten (6), $d\omega$, wird als hyperbolisches Winkelelement eingeführt: sie misst den von zwei durch den Punkt z gehenden und in den Endpunkten des Bogens da endigenden nichteuklidischen Geraden eingeschlossenen Winkel. Man sieht unmittelbar ein, dass dieses nichteuklidische Mass $d\omega$ mit dem euklidischen Mass desselben Winkels übereinstimmt. In der Tat sind beide Masse invariant gegenüber einer linearen Transformation des Einheitskreises in sich, und es ist nach (6) für $z = 0$, in welchem Fall die nichteuklidischen Geraden Radien werden, $d\omega = da$, woraus die Behauptung folgt.

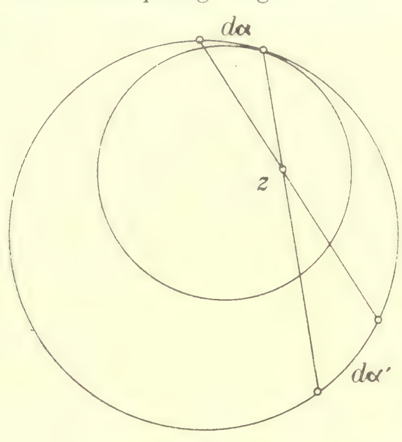


Fig. 1.

Das Winkelelement $d\omega$, das wir im Folgenden *das Winkelmass des Bogens da im Punkte z* nennen werden, lässt auch eine andere einfache geometrische Deutung zu (vgl. Fig. 1). Es ist $1 - |z|^2 = |e^{ia} - z|\,|e^{ia'} - z|$ und somit[1])

$$d\omega = \left|\frac{e^{ia'} - z}{e^{ia} - z}\right| da = da'.$$

8. Der Differentialquotient $\frac{d\omega}{da}$ ist, als reeller Teil der rechts in (3) stehenden linearen Transformation, eine harmonische, nichtnegative Funktion von z; er verschwindet für $|z| = 1$ $(z \neq e^{ia})$ und wird im Punkte $z = e^{ia}$ unendlich. Als Niveaulinien hat er

[1]) Vgl. hierüber H. A. Schwarz, Ges. Werke, B. 2, S. 360.

diejenigen Kreise, welche den Einheitskreis im Punkte $e^{i\alpha}$ berühren; nichteuklidisch gedeutet sind sie Grenzkreise oder *Orizykel*, welche als die orthogonalen Trajectorien einer Schar parallelen (gegen den „unendlich fernen" Punkt $e^{i\alpha}$ gerichteten) Geraden erklärt sind.

Die Transformation (3) bildet den Orizykel

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\alpha_0}-z|^2}=h \quad (0<h<\infty)$$

auf den Orizykel

$$\frac{1-|w|^2}{|e^{i\beta_0}-w|^2}=\frac{h}{\lambda}$$

ab. Dieser letzte Orizykel kann auch so erzeugt werden, dass man z in einem beliebigen Punkt des erstgenannten Orizykels festhält, während man den Parameter μ in (3) stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen lässt.

9. Durch Integration des Winkelmasselementes $d\omega$ erhält man das *Winkelmass* ω *des von den zwei Randpunkten* $e^{i\alpha_1}$ *und* $e^{i\alpha_2}$ *begrenzten Bogens*, gemessen im Punkte z; der reelle Teil des Ausdruckes rechts in (4)″ gibt den Betrag von ω an:

$$\omega(z;\ \alpha_1, \alpha_2)=2 \arg \frac{1-z\,e^{-i\alpha_2}}{1-z\,e^{-i\alpha_1}}+\alpha_2-\alpha_1. \tag{7}$$

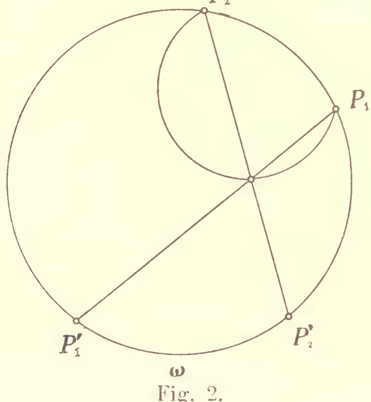


Fig. 2.

Dieses Winkelmass ist gleich dem Winkel, welcher von den in z beginnenden und in P_1 $(=e^{i\alpha_1})$ bzw. P_2 $(=e^{i\alpha_2})$ endigenden Orthogonalkreisbögen des Einheitskreises gebildet wird, andererseits auch gleich dem in Fig. 2 mit ω bezeichneten Bogen, der von den Punkten P_1' und

P_2' begrenzt wird. Hält man die Randpunkte $e^{i\alpha_1}$ und $e^{i\alpha_2}$ fest, so ist ω eine harmonische Funktion von z, welche auf dem von den erwähnten Randpunkten begrenzten Teilbogen der Peripherie $|z| = 1$ $(\alpha_1 < \arg z < \alpha_2)$ gleich 2π ist, während sie auf dem Komplementärbogen verschwindet.

Die Niveaulinie $\omega(z; \alpha_1, \alpha_2) = h$ $(0 < h < 2\pi)$ ist ein Kreisbogen, welcher die Endpunkte des betrachteten Randbogens verbindet und den Komplementärbogen unter dem Winkel $\frac{h}{2}$ schneidet. In der nichteuklidischen Deutung stellt dieser Kreisbogen eine Abstandslinie oder einen *Hyperzykel* dar, welcher durch die Eigenschaft definiert werden kann, dass seine Punkte konstanten (nichteuklidischen) Abstand von der durch die unendlich fernen Punkte $e^{i\alpha_1}$ und $e^{i\alpha_2}$ bestimmten Geraden haben.

Die Transformation (5) bildet den soeben betrachteten Hyperzykel auf den kongruenten Hyperzykel $\omega(w; \beta_1, \beta_2) = h$ ab; dieser letztere kann auch so entstanden gedacht werden, dass der Parameter K in (5) von 0 bis ∞ wächst, während der Punkt z in einem beliebigen Punkt des erstgenannten Hyperzykels festgehalten wird.

§ 2. Das SCHWARZsche Lemma.

10. Wegen der fundamentalen Bedeutung des s. g. SCHWARZschen Lemmas für die vorliegende Untersuchung werden wir hier diesen wichtigen Satz in aller Kürze besprechen.

Lemma von SCHWARZ. — *Es sei*

(8) $$w = w(z)$$

eine analytische Funktion von z, welche für $|z| < 1$ regulär und beschränkt ist, so dass

(8)' $$|w(z)| \leq 1 \text{ für } |z| < 1.$$

Sei ferner $z_0 = ae^{i\alpha}$ ein innerer Punkt des Einheitskreises und $w_0 = be^{i\beta} = w(z_0)$.

Unter diesen Voraussetzungen entspricht jedem Punkt des Zykels

$$\left|\frac{a - z e^{-i\alpha}}{1 - a z e^{-i\alpha}}\right| = r \quad (0 < r < 1)$$

ein Punkt $w = w(z)$ *innerhalb oder auf der Peripherie des kongruenten Zykels*

$$\left|\frac{b - w e^{-i\beta}}{1 - b w e^{-i\beta}}\right| = r.$$

Der letztgenannte Fall trifft dann und nur dann ein, wenn die Beziehung (8) *sich auf eine lineare Transformation der Form* (1) *reduziert*[1]).

Der Beweis ergibt sich bekanntlich fast unmittelbar mittels des *Prinzips über den Maximalbetrag* einer analytischen Funktion. Der Quotient

$$t(z) = \frac{S(w(z); b, \beta)}{S(z; a, \alpha)},$$

wo

$$S(u; c, \gamma) = \frac{c - u e^{-i\gamma}}{1 - c u e^{-i\gamma}},$$

stellt nach den Voraussetzungen des Lemmas eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion dar. Ferner ist $|S(w; b, \beta)| \leqq 1$ für $|z| < 1$ und $|S(z; a, \alpha)|$ stetig und gleich Eins für $|z| = 1$. In einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Peripheriepunktes des Einheitskreises ist also für ein gegebenes $\varepsilon > 0$

$$|t| < \frac{1}{1 - \varepsilon};$$

---

[1]) Gewöhnlich wird $a = b = 0$ angenommen. In der obigen allgemeineren Fassung wurde der Satz zuerst von Herrn E. LINDELÖF angegeben, als Spezialfall eines allgemeinen Prinzips („LINDELÖFsches Prinzip") (*Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta Soc. Scient. Fennicae, T. 35, N:o 7, 1908).

nach dem Prinzip des Maximums muss dies auch in jedem inneren Punkt des Einheitskreises gelten, und es ist also, da ε beliebig klein gewählt werden kann,

$$(9) \qquad |t(z)| = \left|\frac{S(w; b, \beta)}{S(z; a, \alpha)}\right| \leqq 1$$

für $|z| < 1$, womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist.

Wenn $|t| = 1$ für einen inneren Punkt z des Einheitskreises, so reduziert sich $t(z)$ nach dem zitierten Prinzip auf eine Konstante der Form $e^{i\gamma}$, und die Relation (8) geht also in die lineare Transformation (1) über. Der Beweis des SCHWARZschen Lemmas ist hiermit vollständig erbracht.

11. Die Aussage des SCHWARZschen Lemmas lässt sich so deuten[1]), dass der nichteuklidische Abstand von zwei Punkten z, z_0 durch die Abbildung $w = w(z)$ nicht vergrössert wird:

$$[w, w_0] \leqq [z, z_0],$$

und im Falle einer linearen Transformation, und nur in diesem, invariant bleibt.

Da dies für beliebig kleine Entfernungen $[z, z_0]$ gilt, so muss dasselbe auch für die nichteuklidischen Linienelemente bestehen, und es ist also

$$(10) \qquad \frac{|dw|}{1 - |w|^2} \leqq \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Diese Beziehung lässt sich auch direkt aus der Ungleichung (9) für $z = z_0$ ablesen. Es ist nämlich

$$|t(z_0)| = \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |w_0|^2}\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z = z_0} \leqq 1;$$

und zugleich ergibt sich hieraus der Zusatz, dass auch in (10) Gleichheit nur für die lineare Transformation (1) bestehen kann, denn

[1]) Diese Deutung ist zuerst von Herrn PICK angegeben worden (*Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Gebiete*, Math. Ann., B. 77, 1916, S. 1—6).

die Beziehung $|t(z_0)| = 1$ impliziert, dass der durch (9) definierte Quotient $t(z)$ sich auf eine Konstante der Form $e^{i\gamma}$ reduziert.

§ 3. Das Juliasche Lemma.

12. Die von Herrn Julia [1]) entdeckte Erweiterung des Schwarzschen Lemmas bezieht sich bekanntlich auf den Grenzfall, wo die gegebenen Punkte z_0 und w_0 *Randpunkte* sind. Die dieser Erweiterung zu Grunde liegenden Voraussetzungen sind nachher von verschiedenen Autoren verschärft worden und haben erst kürzlich durch Herrn Carathéodory [2]) eine Fassung erhalten, welche als endgültig bezeichnet werden kann.

Satz von Carathéodory. — *Es sei*

$$w = w(z) \tag{8}$$

eine analytische Funktion, welche für $|z| < 1$ *regulär und beschränkt ist:*

$$|w(z)| \leqq 1 \quad \textit{für} \quad |z| < 1. \tag{8'}$$

Bezeichnen $z_0 = e^{i\alpha}$, $w_0 = e^{i\beta}$ *zwei beliebige Randpunkte des Einheitskreises, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{z = z_0} \frac{1 - we^{-i\beta}}{1 - ze^{-i\alpha}} = \lambda, \tag{11}$$

wobei die Variabilität von z *auf einen von zwei durch den Punkt* z_0 *gehenden, beliebigen Sehnen des Einheitskreises begrenzten Winkelraum eingeschränkt wird. Der Grenzwert* λ *ist reell und* $0 < \lambda \leqq \infty$, *ausser in dem einzigen Fall, wo* $w \equiv e^{i\beta}$ *und also* $\lambda = 0$.

Falls $\lambda < \infty$, *so strebt auch die Ableitung* $w'(z)$ *für* $z \to z_0$ *gegen einen Grenzwert, und zwar ist*

$$\lim_{z = z_0} w'(z) = \lim_{z = z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \lambda e^{i(\beta - \alpha)}, \tag{11'}$$

[1]) G. Julia: *Extension d'un lemme de Schwarz* (Acta math., t. 42, 1920).

[2]) C. Carathéodory: *Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen* (Sitz.ber. der preuss. Akad., B. 32, 1929).

unter gleicher Einschränkung, wie oben, in bezug auf die Variabilität von z.

Der Grenzwert λ, der (wie im Folgenden gezeigt wird) auch durch die Beziehung

$$\lambda = \lim_{r=1} \frac{1 - |w(re^{ia})|}{1 - r}$$

definiert werden kann, wird kurz *Abbildungsmodul im Randpunkte* z_0 genannt.

Die in diesem Satze ausgesprochene Tatsache, dass aus der einzigen Voraussetzung (8)' die Existenz eines Grenzwertes des Quotienten

$$\frac{w - w_0}{z - z_0}$$

bei Annäherung an $z = z_0$ folgt, wie auch die Randpunkt z_0, w_0 gewählt werden, erscheint vielleicht etwas weniger überraschend, wenn man bemerkt, dass dieser Grenzwert im allgemeinen *unendlich* ist, d. h. $\lambda = \infty$.

Im Falle $\lambda < \infty$ lässt sich noch Weiteres über das Verhalten der Funktion $w(z)$ schliessen:

Lemma von Julia. — *Wenn der Abbildungsmodul λ endlich ist, so entspricht vermöge* (8) *jedem Punkt $z \neq z_0$ eines durch den Punkt z_0 gehenden Orizykels*

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{ia} - z|^2} = h \quad (0 < h < \infty)$$

ein Punkt w innerhalb oder auf dem Orizykel

$$\frac{1 - |w|^2}{|e^{i\beta} - w|^2} = \frac{h}{\lambda}.$$

Der letztgenannte Fall trifft dann und nur dann zu, wenn die Beziehung (8) *eine lineare Transformation der Form* (3) *ist.*

13. Die obigen Sätze lassen sich durch verschiedene Methoden beweisen. Wir werden hier einem von Herrn Denjoy herrührenden Beweisgang folgen, der diese Sätze durch einen (dem S. 7

ausgeführten analogen) Grenzübergang als direkte Folgerungen des SCHWARZschen Lemmas liefert[1]).

Es sei $w = w(z)$ eine Funktion, welche der Voraussetzung (8)′ genügt und sei $z = e^{i\alpha_0}$ ein beliebiger Randpunkt des Einheitskreises. Wir bezeichnen ferner mit W ein Dreieck, das von zwei beliebigen Sehnen des Einheitskreises und von einem die Sehnen schneidenden Kreisbogen $|z| = r_0$ $(0 < r_0 < 1)$ begrenzt ist; sei schliesslich W_r dasjenige Teilgebiet von W, das ausserhalb des Kreises $|z| = r$ $(r_0 < r < 1)$ liegt.

Wir bezeichnen nun mit λ_r die untere Grenze

$$\lambda_r = \liminf_{W_r} \frac{1 - |w|}{1 - |z|},$$

wobei also nur die in W_r liegenden Punkte z in Betracht kommen sollen. Diese Zahl λ_r gehört für $r_0 \leqq r < 1$ dem Intervall $0 \leqq \lambda_r < \infty$ an und stellt eine mit wachsendem r monoton zunehmende Funktion dar. Für $r \to 1$ strebt sie also gegen einen Grenzwert

(12) $$\lambda = \lim_{r=1} \lambda_r \quad (0 \leqq \lambda \leqq \infty).$$

Wir betrachten der Reihe nach die drei Fälle $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$ und $0 < \lambda < \infty$.

14. *Fall* $\lambda = \infty$. In diesem Fall gilt im Gebiete W gleichmässig

(13) $$\lim_{z=e^{i\alpha_0}} \frac{1 - ze^{-i\alpha_0}}{1 - we^{-i\beta}} = 0,$$

wie auch die Zahl β gewählt werden mag. In der Tat: es existiert eine endliche Zahl k derart, dass im ganzen Gebiete W

(14) $$|e^{i\alpha_0} - z| < k(1 - |z|).$$

[1]) Diese Beweismethode ist für die Zwecke der vorliegenden Arbeit besonders gut geeignet. Ein kürzerer und sehr einfacher Beweis des ersten Teils des CARATHÉODORYschen Satzes sowie des JULIAschen Lemmas wurde neuerdings von den Herren LANDAU und VALIRON veröffentlicht (*A deduction from SCHWARZ's Lemma*, Journal of the London Math. Society, Vol. 4, Part 3, 1929).

Andererseits ist $|e^{i\beta} - w| \geqq 1 - |w|$, und es gilt also in W_r

$$\left|\frac{e^{i\alpha_0} - z}{e^{i\beta} - w}\right| < k\,\frac{1 - |z|}{1 - |w|} \leqq \frac{k}{\lambda_r},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

15. *Fall* $\lambda = 0$. Die Funktion $w(z)$ reduziert sich in diesem Fall notwendigerweise auf eine Konstante vom absoluten Betrag Eins: $w(z) = e^{i\beta_0}$.

Nehmen wir nämlich an, dass w keine derartige Konstante wäre, und bezeichnen wir durch $w_0 = w(z_0) = be^{i\beta}$ ihren Wert in einem beliebigen *inneren* Punkt $z_0 = ae^{i\alpha}$, $0 < a < 1$, so muss auch $|w_0| = b < 1$ sein, und wir können wie beim Beweise des SCHWARZschen Lemmas verfahren. Wir bilden also den Quotienten $t(z)$, der für $|z| < 1$ der Bedingung $|t| \leqq 1$ genügt (vgl. (9)), und finden für $z = 0$

$$\frac{b - w(0)\,e^{-i\beta}}{1 - b\,w(0)\,e^{-i\beta}} = a\,t(0).$$

Subtrahiert man diese Zahlen von Eins, so wird

$$\frac{(1 - b)(1 + w(0)\,e^{-i\beta})}{1 - bw(0)\,e^{-i\beta}} = 1 - a\,t(0)$$

und also

$$\frac{1 - a}{1 - b} \leqq \frac{|1 - a\,t(0)|}{1 - b} = \left|\frac{1 + w(0)\,e^{-i\beta}}{1 - bw(0)\,e^{-i\beta}}\right| < \frac{1 + |w(0)|}{1 - |w(0)|}.$$

Hieraus folgt, dass λ_r über einer festen positiven Schranke liegt, wonach der Grenzwert $\lambda > 0$ wäre, im Widerspruch mit der Voraussetzung $\lambda = 0$.

Die Funktion $w(z)$ muss sich also, wie behauptet wurde, auf eine Konstante der Form $e^{i\beta_0}$ reduzieren; der Quotient

$$\frac{1 - we^{-i\beta}}{1 - ze^{-i\alpha_0}}$$

strebt demnach für $z \to e^{i\alpha_0}$ (in W) dem Wert ∞ oder 0 zu, je nachdem $\beta \neq \beta_0$ oder $\beta = \beta_0$.

16. *Fall* $0 < \lambda < \infty$. Wir wählen zunächst innerhalb W eine unendliche Folge (z) von gegen $e^{i\alpha_0}$ strebenden Punkten z derart, dass

$$\frac{1 - |w|}{1 - |z|} \to \lambda,$$

wenn z diese Folge durchläuft, was gemäss der Definition von λ möglich ist. Da $\lambda > 0$, so häufen sich die entsprechenden Werte w gegen die Peripherie $|w| = 1$, und es existieren also eine Zahl β_0 und eine Teilfolge $z_\nu = a_\nu e^{i\alpha_\nu}$ der Folge (z) von der Art, dass die Punkte $w_\nu \equiv w(z_\nu) = b_\nu e^{i\beta_\nu}$ für $\nu \to \infty$ gegen den Punkt $e^{i\beta_0}$ streben. Man hat somit

$$\frac{1 - b_\nu}{1 - a_\nu} \to \lambda, \; a_\nu e^{i\alpha_\nu} \to e^{i\alpha_0}, \; b_\nu e^{i\beta_\nu} \to e^{i\beta_0} \text{ für } \nu \to \infty.$$

Nach dieser Vorbereitung bilden wir wieder den Quotienten $t(z)$ (S. 13), wobei wir $z_0 = a_\nu e^{i\alpha_\nu}$, $w_0 = b_\nu e^{i\beta_\nu}$ setzen. Für den sofort vorzunehmenden Grenzübergang $\nu \to \infty$ ist es zweckmässig, diese Funktion $t(z)$, welche für $|z| < 1$ die Eigenschaft $|t| \leq 1$ hat, zu transformieren durch eine Substitution, welche den Einheitskreis $|t| \leq 1$ invariant lässt und den Wert $t = 0$ in einen gewissen Wert c_ν des Intervalles $0 < c_\nu < 1$ führt; über die Konstante c_ν wird im Folgenden in passender Weise näher verfügt. Die transformierte Funktion $\tau_\nu(z)$ ist hiernach durch die Beziehung

$$t = \frac{c_\nu - \tau_\nu}{1 - c_\nu \tau_\nu}$$

bestimmt, und es ist

$$\frac{b_\nu - we^{-i\beta_\nu}}{1 - b_\nu we^{-i\beta_\nu}} = \frac{a_\nu - ze^{-i\alpha_\nu}}{1 - a_\nu ze^{-i\alpha_\nu}} \frac{c_\nu - \tau_\nu}{1 - c_\nu \tau_\nu},$$

wo also

$$|\tau_\nu(z)| \leq 1 \text{ für } |z| < 1.$$

Diese Identität lässt sich auch schreiben (vgl. S. 7):

$$(15)\qquad \frac{(1-b_\nu)(1+we^{-i\beta_\nu})}{1-b_\nu we^{-i\beta_\nu}} = \frac{(1-a_\nu)(1+ze^{-i\alpha_\nu})}{1-a_\nu ze^{-i\alpha_\nu}} + \frac{(1-c_\nu)(1+\tau_\nu)}{1-c_\nu\tau_\nu}\,\frac{a_\nu - ze^{-i\alpha_\nu}}{1-a_\nu ze^{-i\alpha_\nu}}.$$

Wir lassen nun ν unbeschränkt wachsen, während z (und also auch $w = w(z)$) festgehalten wird. Durch Division beiderseits mit $1 - a_\nu$ ergeben sich hierbei als Grenzwerte der linken Seite und des ersten Gliedes rechts die Ausdrücke

$$\lambda\,\frac{1+we^{-i\beta_0}}{1-we^{-i\beta_0}} \text{ bzw. } \frac{1+ze^{-i\alpha_0}}{1-ze^{-i\alpha_0}},$$

während der letzte Faktor des zweiten Gliedes der rechten Seite gegen den Wert Eins konvergiert.

Wir wählen nun eine beliebige positive, endliche Zahl μ und denken uns die Parameterwerte c_ν so festgelegt, dass

$$(16)\qquad \frac{1-c_\nu}{1-a_\nu} \to \mu \text{ für } \nu \to \infty.$$

Nach dieser Festsetzung schliesst man aus (15), dass auch der Ausdruck

$$\frac{1+\tau_\nu}{1-c_\nu\tau_\nu}$$

für $\nu \to \infty$ einem wohlbestimmten Grenzwert zustrebt, und da hierbei $c_\nu \to 1$, so folgt schliesslich die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_\nu(z) = \tau(z)$$

für jedes $|z| < 1$. Es ist

$$(17)\qquad \lambda\,\frac{1+we^{-i\beta_0}}{1-we^{-i\beta_0}} = \frac{1+ze^{-i\alpha_0}}{1-ze^{-i\alpha_0}} + \mu\,\frac{1+\tau}{1-\tau}$$

und $|\tau| \leqq 1$ für $|z| < 1$.

Im Falle $0 < \lambda < \infty$ existiert also eine reelle Zahl β_0, so dass die durch (17) bestimmte analytische Funktion $\tau(z)$ beschränkt ist:

$$|\tau(z)| \leqq 1 \text{ für } |z| < 1.$$

17. Vergleicht man die reellen Teile der Ausdrücke links und rechts in (17), so wird

$$(18) \qquad \lambda \frac{1-|w|^2}{|1-we^{-i\beta_0}|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-i\alpha_0}|^2} + \mu \frac{1-|\tau|^2}{|1-\tau|^2}.$$

Wegen der innerhalb W gültigen Beziehung (14) folgt, dass wenn der Punkt z, ohne dieses Gebiet zu verlassen, gegen den Randpunkt $e^{i\alpha_0}$ strebt, das erste Glied rechts in (18) und somit die ganze rechte Seite unbeschränkt wächst. Dies ist aber nur dann möglich, wenn gleichzeitig $w \to e^{i\beta_0}$, und zwar muss dies gleichmässig (im Gebiete W) gelten.

Wir behaupten ferner, dass der Quotient

$$(19) \qquad \frac{1-ze^{-i\alpha_0}}{1-we^{-i\beta_0}} = \frac{1}{\lambda}\frac{1+ze^{-i\alpha_0}}{1+we^{-i\beta_0}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{(1+\tau)}{1+we^{-i\beta_0}}\frac{1-ze^{-i\alpha_0}}{1-\tau}$$

hierbei gleichmässig gegen den Grenzwert $\frac{1}{\lambda}$ strebt. Da diese Behauptung evident ist, falls der Ausdruck $|1-\tau|$ in W oberhalb einer positiven Schranke liegt, so genügt es den Beweis in dem Fall zu führen, wo der Wert $\tau = 1$ Häufungswert von $\tau(z)$ in der Winkelumgebung W des Punktes $e^{i\alpha_0}$ ist. Setzt man dann

$$\lambda'_r = \liminf_{W_r} \frac{1-|\tau|}{1-|z|}$$

und

$$\lambda' = \lim_{r=1} \lambda'_r \quad (0 \leqq \lambda' \leqq \infty),$$

so sieht man zunächst ein, dass $\lambda' > 0$. Denn sonst könnte man das in Nr. 15 Bewiesene auf die Funktion τ anwenden; hiernach müsste τ gleich einer Konstante vom absoluten Betrage Eins sein, und da τ den Wert 1 als Häufungswert hat, so würde $\tau \equiv 1$ sein, und somit $w \equiv e^{i\beta_0}$. Dies ist aber unmöglich, denn die Grenze λ (S. 17) ist nach Voraussetzung *positiv*.

Zweitens kann aber λ' keinen endlichen positiven Wert haben, denn anderenfalls könnte man, indem man die Betrachtungen

S. 19—21 auf die Funktion τ anwendet, schliessen, dass $\tau \to 1$ für $z \to e^{i\alpha_0}$ (in W), und dass ferner (vgl. (18))

$$\frac{1-|\tau|^2}{|1-\tau|^2} \geq \frac{1}{\lambda'} \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-i\alpha_0}|^2}.$$

Aus (18) folgt dann weiter für $z = |z| e^{i\alpha_0}$

$$\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{\lambda'}\right)\frac{1+|z|}{1-|z|} \leq \frac{1-|w|^2}{|1-we^{-i\beta}|^2} \leq \frac{1+|w|}{1-|w|}$$

und also

$$\liminf_{W_r} \frac{1-|w|}{1-|z|} \leq \frac{\lambda\lambda'}{\lambda'+\mu} \lim \frac{1+|w|}{1+|z|} = \frac{\lambda\lambda'}{\lambda'+\mu} < \lambda,$$

in Widerspruch zu der Definition (12) von λ.

Es ist also $\lambda' = \infty$, und man schliesst, dass das letzte Glied in (19), wegen (vgl. (14))

$$\left|\frac{1-ze^{-i\alpha_0}}{1-\tau}\right| \leq \frac{|1-ze^{-i\alpha_0}|}{1-|\tau|} \leq k \left|\frac{1-|z|}{1-\tau}\right|,$$

für $z \to e^{i\alpha_0}$ (gleichmässig in W) gegen Null strebt.

Nunmehr ergibt sich die behauptete gleichmässige Konvergenz des Quotienten (11) unmittelbar aus (19):

$$\lim_{z=e^{i\alpha_0}} \frac{1-we^{-i\beta_0}}{1-ze^{-i\alpha_0}} = \lambda.$$

Wenn β_0 durch eine beliebige Zahl $\beta \neq \beta_0$ ersetzt wird, so ist der linksstehende Grenzwert wiederum gleich ∞.

Durch das in den Nummern 14—17 Bewiesene ist die Richtigkeit des ersten Teils des CARATHÉODORYschen Satzes nachgewiesen. Aus (18) ergibt sich auch, dass, wie S. 16 behauptet wurde,

$$\lambda = \lim \frac{1-|w|}{1-|z|} \text{ für } |z| \to 1 \ (z = |z|\, e^{i\alpha_0}).$$

18. Um schliesslich die Behauptung über das Verhalten der Ableitung $w'(z)$ zu beweisen, genügt es den in Nr. 16 vorausge-

setzen Fall zu betrachten. Durch Differentiation der Beziehung (17) erhält man

$$(20)\qquad e^{i(\alpha_0-\beta_0)}\, w'(z) = \left(\frac{1-we^{-i\beta_0}}{1-ze^{-i\alpha_0}}\right)^2 \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1-ze^{-i\alpha_0}}{1-\tau}\right)^2 \tau'(z)\right].$$

Hier konvergiert gemäss (11) der erste Faktor rechts gegen λ^2, wenn $z \to e^{i\alpha_0}$. Ferner ist in W (vgl. (14))

$$(21)\qquad \left|\frac{1-ze^{-i\alpha_0}}{1-\tau}\right|^2 |\tau'(z)| \leqq k^2\left(\frac{1-|z|}{1-|\tau|}\right)^2 |\tau'|.$$

Nach dem Schwarzschen Lemma in der Differentialform (10), S. 14, ist aber

$$|\tau'| \leqq \frac{1-|\tau|^2}{1-|z|^2} < 2\frac{1-|\tau|}{1-|z|},$$

und der Ausdruck links in (21) wird also kleiner als

$$2k^2 \frac{1-|z|}{1-|\tau|};$$

er strebt folglich gemäss dem Ergebnis der S. 22 gleichmässig gegen Null, wenn $z \to e^{i\alpha_0}$ (innerhalb W). Der Klammerausdruck in (20) hat demnach den Grenzwert $\frac{1}{\lambda}$, und es gilt also gleichmässig in W:

$$w'(z) \to \lambda e^{i(\beta_0-\alpha_0)} \text{ für } z \to e^{i\alpha_0}, \text{ w. z. b. w.}$$

19. Wenn der Grenzwert (11) endlich und > 0 ist, so gilt die Beziehung (18); geometrisch gedeutet enthält sie die Aussage des Juliaschen Lemmas: Einem Punkt z des Orizykels

$$\frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-i\alpha_0}|^2} = h \qquad (h > 0)$$

enstpricht vermöge $w = w(z)$ ein Punkt w innerhalb oder auf dem Orizykel

$$\frac{1-|w|^2}{|1-we^{-i\beta_0}|^2} = \frac{h}{\lambda}.$$

Der letztgenannte Fall kann nach (18) nur dann eintreffen, wenn $|\tau| = 1$ für einen gewissen inneren Punkt z des Einheitskreises:

dann ist aber $\tau = e^{i\vartheta}$, wo ϑ eine konstante Zahl des Intervalles $0 < \vartheta < 2\pi$ ist, und die Beziehung $w = w(z)$ ist gemäss (17) eine lineare Transformation von der Form (3). Hiermit ist auch das JULIAsche Lemma vollständig bewiesen.

§ 4. Das LÖWNERsche Lemma.

20. Man betrachte eine Funktion $w(z)$, die im Einheitskreise beschränkt ist:

$$|w(z)| < 1 \text{ für } |z| \leq 1,$$

und die auf einem gewissen Randbogen *regulär* und *ihrem absoluten Betrage nach gleich Eins* ist. Ist dieser Randbogen durch $\alpha_1 \leqq \arg z \leqq \alpha_2$ $(\alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi)$ definiert, so hat man also

$$w(e^{i\alpha}) = e^{i\beta},$$

wo β als eine wachsende Funktion von α im Intervalle $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ erklärt ist; es ist für dieselben Werte α

$$|w'(e^{i\alpha})| = \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

In jedem dieser Randpunkte $e^{i\alpha}$ kann man den JULIAschen Satz anwenden; es wird also nach (18) für $|z| < 1$, da $\lambda = |w'(e^{i\alpha})|$,

$$|w'(e^{i\alpha})| \frac{1 - |w|^2}{|1 - we^{-i\beta}|^2} \geq \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-i\alpha}|^2}$$

oder also

$$\frac{1 - |w|^2}{|1 - we^{-i\beta}|^2} d\beta \geq \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-i\alpha}|^2} d\alpha,$$

eine Beziehung, die in der Bezeichnung der S. 11 sich einfach folgendermassen schreiben lässt:

$$(22) \qquad d\omega(w; \beta_1, \beta) < d\omega(z; \alpha_1, \alpha).$$

Das JULIAsche Lemma sagt aus, dass das Winkelmass eines Randbogenelementes $d\alpha$ durch die Transformation $w = w(z)$ vergrössert wird, ausser in dem einzigen Fall einer linearen Transformation (5), *für welche das Winkelmass invariant bleibt.*

21. Durch Integration findet man aus (22), dass

$$\omega(w; \beta_1, \beta_2) \geqq \omega(z; \alpha_1, \alpha_2) \qquad (e^{i\beta_\nu} = w(e^{i\alpha_\nu}),\ \nu = 1, 2).$$

Hier besteht das Gleichheitszeichen nach Obigem nur dann, wenn w eine linear gebrochene Funktion von z ist, für welche man durch die Betrachtung der S. 8 den Ausdruck (5) findet. Wir haben somit das[1])

Lemma von Löwner. — *Wenn eine Funktion $w(z)$, welche für $|z| < 1$ beschränkt ist:*

$$|w(z)| < 1,$$

auf einem Randbogen $|z| = 1$, $\alpha_1 \leq \arg z \leq \alpha_2$ $(\alpha_1 - \alpha_2 < 2\pi)$ regulär ist und dort Werte annimmt, welche auf den Randbogen $|w| = 1$, $\beta_1 \leq \arg w \leq \beta_2$ $(\beta_2 - \beta_1 < 2\pi)$ fallen, so entspricht jedem Punkt $z \neq e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}$ des Hyperzykels

$$\omega(z; \alpha_1, \alpha_2) = h \qquad (0 < h < 2\pi)$$

ein Punkt w, welcher entweder innerhalb des von dem zuletztgenannten Randbogen und dem Hyperzykel

$$\omega(w; \beta_1, \beta_2) = h$$

begrenzten Gebietes oder auf diesem Hyperzykel liegt.

Der letztgenannte Fall trifft dann und nur dann ein, wenn die Beziehung $w = w(z)$ sich auf eine lineare Transformation der Form (5), S. 8, *reduziert.*

Es ist zu bemerken, dass die hier vorausgesetzte Regularität der Funktion w auf dem betrachteten Randbogen wegen des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes durch die Annahme ersetzt werden kann, dass die Funktion auf diesem Randbogen stetig ist.

---

[1]) Die nachfolgende Fassung erhält man durch kreisgeometrische Verallgemeinerung aus der Löwnerschen Form des Lemmas (vgl. Bieberbach, Funktionentheorie II, S. 124): *Es sei $|w| < 1$ für $|z| < 1$ und $w(0) = 0$. Falls $|w|$ stetig und $= 1$ auf einem Bogen B_1 des Kreises $|z| = 1$, so ist der Bildbogen B_2 von B_1 nicht kürzer als B_1. Die Bögen B_1 und B_2 sind dann und nur dann einander gleich, wenn $w = e^{i\vartheta} z$, wo ϑ eine reelle Konstante ist.*

Aus den obigen Überlegungen ist hervorgegangen, dass das SCHWARZsche Lemma und seine Erweiterungen in folgende Aussagen zusammengefasst werden können.

Durch eine Transformation $w = w(z)$, wo

$$|w(z)| < 1 \text{ für } |z| < 1,$$

wird das nichteuklidische Bogenelement verkleinert und das Winkelmass eines Randbogenelements vergrössert, ausser wenn w eine lineare Transformation ist, die den Einheitskreis invariant lässt, in welchem Fall das Bogen- und Winkelmass invariant bleiben.

22. Wir bemerken schliesslich, dass das LÖWNERsche Lemma, welches oben als die „Integralform" des JULIAschen Lemmas aufgefasst wurde, unabhängig von diesem bewiesen werden kann. Wir lassen hier einen Beweis folgen, der auf einen direkten Vergleich der Winkelmasse der gegebenen Randbögen beruht und von besonderer prinzipieller Bedeutung ist, weil er unschwer zu gewissen Erweiterungen des Lemmas führt[1].

[1] Der Beweis lässt sich im Anschluss an Herrn LÖWNER (BIEBERBACH Funktionentheorie II S. 124) auch so führen, dass man für einen beliebigen inneren Punkt z des Einheitskreises den Quotienten

$$\frac{w(t) - w(z)}{1 - \bar{w}(z)\, w(t)} : \frac{t - z}{1 - \bar{z}\, t}$$

bildet und zeigt, dass das Argument dieser im Einheitskreise $|t| < 1$ beschränkten Funktion einen *nichtnegativen* Zuwachs erhält, wenn der Punkt t den gegebenen Randbogen B_1 im positiven Sinn durchläuft.

Auch kann das Lemma als direkte Folgerung des SCHWARZschen Lemmas durch folgende Überlegung gewonnen werden. Mittels des Spiegelungsprinzips ergibt sich zunächst, dass $w(z)$ in der längs des Komplementärbogens von B_1 aufgeschlitzten Vollebene E_1 regulär ist und Werte annimmt, die in den Schlitzbereich E_2 fallen, welcher durch Aufschneidung der w-Ebene längs des Komplementärbogens des Bildbogens B_2 von B_1 erhalten wird. Werden die Bereiche E_1 und E_2 auf den Einheitskreis abgebildet, so dass B_1 und B_2 in die reelle Achse übergehen, so gelangt man durch Anwendung des SCHWARZschen Lemmas zum Ziel.

Betrachten wir also eine Funktion $w(z)$, welche für $|z| < 1$ der Bedingung $|w(z)| < 1$ genügt. Auf dem Randbogen $|z| = 1$, $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ $(\alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi)$ sei $w(z)$ stetig; es wird ferner angenommen, dass diese Randwerte auf einen gewissen Bogen $\beta_1 < \arg w < \beta_2$ des Kreises $|w| = 1$ fallen. Um nun zu beweisen, dass

$$(23) \qquad \omega(w(z); \beta_1, \beta_2) - \omega(z; \alpha_1, \alpha_2) \geqq 0,$$

bemerke man, dass der linksstehende Ausdruck eine innerhalb des Einheitskreises reguläre harmonische Funktion ist, welche auf dem gegebenen Randbogen konstant gleich Null ist und in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes des Komplementärbogens $> -\varepsilon$ ist (wo ε eine beliebig kleine positive Zahl ist), mit Ausnahme der Punkte $e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}$, wo sie jedenfalls nach unten beschränkt bleibt[1]. Nach dem Prinzip des Minimums einer harmonischen Funktion ist der betrachtete Ausdruck also auch im Innern $> -\varepsilon$ und kann also, da ε beliebig klein ist, für $|z| < 1$ überhaupt keine negative Werte annehmen, w. z. b. w.

Wenn in einem inneren Punkt des Einheitskreises $\omega(w(z); \beta_1, \beta_2) = \omega(z; \alpha_1, \alpha_2)$, so muss nach demselben Prinzip diese Gleichung für jedes $|z| < 1$ gelten; in diesem Fall reduziert sich aber, wie aus den Beziehungen (7), (4)″ und (5) zu ersehen ist, die Relation $w = w(z)$ auf eine lineare Transformation der Form (5). Hiermit ist das Löwnersche Lemma vollständig bewiesen.

23. Der obige Beweis könnte, unter Vermeidung des Minimumprinzips, auch so geführt werden, dass man das Winkelmass $\omega(w(z); \beta_1, \beta_2)$ durch ihre Werte auf dem Kreis $|z| = r < 1$ mittels des Poissonschen Integrals darstellt. Lässt man alsdann r gegen Eins konvergieren, so strebt das Integral gegen einen Grenzwert, der sich, wie unmittelbar zu ersehen ist, in der Form

[1] Die Sonderstellung der Endpunkte $e^{i\alpha_\nu}$ kann übrigens dadurch aufgehoben werden, dass man das Winkelmass $\omega(w; \beta_1, \beta_2)$ durch $\omega(w; \beta_1', \beta_2')$ ersetzt, wo $\beta_1' < \beta_1 < \beta_2 < \beta_2'$, und nachträglich β_ν' gegen β_ν $(\nu = 1, 2)$ konvergieren lässt.

$\omega(z; \alpha_1, \alpha_2)$ + nichtnegative harmonische Funktion schreiben lässt, womit der Beweis erbracht ist.

Wir bemerken schliesslich, dass dieser Beweisgang zu folgender Erweiterung des LÖWNERschen Lemmas führt:

Wenn die beschränkte Funktion $w(re^{i\alpha})$ ($|w| \leqq 1$ *für* $r < 1$) *für eine messbare Menge A der Werte α Randwerte*

$$e^{i\beta} = \lim_{r=1} w(re^{i\alpha}) \tag{24}$$

vom absoluten Betrage Eins hat, so ist das Winkelmass

$$\int_B d\omega(w(z); 0, \beta)$$

der Menge B dieser Randwerte nicht kleiner als das Winkelmass

$$\int_A d\omega(z; 0, \alpha)$$

der Punktmenge A [1]).

Insbesondere schliesst man, unter Zuhilfenahme des SCHWARZschen Spiegelungsprinzips:

Falls die Randwerte (24) *fast überall auf einem Randbogen* $|z| = 1$, $\alpha_1 < \arg z = \alpha < \alpha_2$ ($\alpha_2 > \alpha_1$) *existieren, so ist entweder das Lebesguesche Mass der Menge B dieser Randwerte gleich* 2π, *oder aber ist die Funktion w über den gegebenen Randbogen analytisch fortsetzbar* [2]).

Interessante Beispiele zu diesen Sätzen liefern die s.g. BLASCHKEschen Produkte, von denen im folgenden Abschnitte die Rede sein wird.

---

[1]) Wenn $z = 0$, $w(0) = 0$, so stimmen diese Winkelmasse mit den gewöhnlichen LEBESGUEschen Massen der Mengen A und B überein.

[2]) Diese Sätze stehen im Zusammenhang mit einem Satz von Herrn HÖSSJER; vgl. hierzu die in diesem Band erschienene Arbeit von Herrn MYRBERG: *Ein Satz über die fuchsschen Gruppen und seine Anwendung in der Funktionentheorie.*

II. Lösung des Interpolationsproblems.

§ 1. Fall, wo die Anzahl der gegebenen Werte endlich ist.

24. Es seien gegeben n innere Punkte des Einheitskreises

(1) $$z_\nu = a_\nu e^{i\alpha_\nu} \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

und n komplexe Zahlen

(2) $$w_\nu \, (\nu = 1, \cdots, n).$$

Wir fragen nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine analytische Funktion $w = w(z)$ existiere, die im Einheitskreise beschränkt ist:

(3) $$|w(z)| \leqq 1 \text{ für } |z| < 1,$$

und die in den gegebenen Punkten die vorgeschriebenen Werte annimmt[1]):

(4) $$w(z_\nu) = w_\nu \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

Zur Abkürzung werden wir sagen, dass jede derartige Funktion der *Klasse* E_n angehört, während die Klasse der analytischen Funktionen, welche der Bedingung (3) allein genügen, mit E bezeichnet werden soll.

25. Es sei $w(z)$ eine Funktion der Klasse E_n. Nach (4) und (3) ist dann

$$|w_1| = b_1 \leqq 1.$$

Falls nun $b_1 = 1$, so ist $w(z) \equiv w_1$ und also

(5) $$w_1 = \cdots = w_n, \ |w_\nu| = 1;$$

[1]) Vgl. die S. 4 zitierte Arbeit von Herrn Pick sowie die erste der in der Fussnote 2) (S. 4) angegebenen Arbeiten.

und umgekehrt, wenn diese letzten Bedingungen erfüllt sind, so existiert eine Funktion der Klasse E_n, nämlich die Konstante w_1.

Falls wiederum $b_1 < 1$, so setze man $w_1 = b_1 e^{i\beta_1}$ und definiere die Funktion $w^{(2)}(z)$ durch die Formel (vgl. S. 19)

$$(6) \qquad \frac{b_1 - we^{-i\beta_1}}{1 - b_1 we^{-i\beta_1}} = \frac{a_1 - ze^{-ia_1}}{1 - a_1 ze^{-ia_1}} \cdot \frac{c_1 - w^{(2)} e^{-i\beta_1}}{1 - c_1 w^{(2)} e^{-i\beta_1}},$$

wo c_1 eine *beliebige* Zahl des Intervalles $0 \leqq c_1 < 1$ ist, über die wir im Folgenden in geeigneter Weise verfügen werden. Nach dem Prinzip des Maximums ist $w^{(2)}$ eine Funktion der Klasse E; ferner nimmt sie in den Punkten $z_2, \cdots, z_n$ Werte $w_2^{(2)}, \cdots w_n^{(2)}$ an, welche sich durch die gegebenen berechnen lassen aus der Beziehung

$$(7) \qquad \frac{b_1 - w_\nu e^{-i\beta_1}}{1 - b_1 w_\nu e^{-i\beta_1}} = \frac{a_1 - z_\nu e^{-ia_1}}{1 - a_1 z_\nu e^{-ia_1}} \cdot \frac{c_1 - w_\nu^{(2)} e^{-i\beta_1}}{1 - c_1 w_\nu^{(2)} e^{-i\beta_1}} \; (\nu = 2, \cdots, n).$$

Umgekehrt gilt, dass wenn in der Beziehung (6) für $w^{(2)}$ eine Funktion eingesetzt wird, welche den soeben ausgesprochenen Bedingungen genügt, die hierdurch bestimmte Funktion w zur Klasse E_n gehört.

Notwendig und hinreichend, damit eine Funktion w der Klasse E_n existiere ist, dass einer der folgenden zwei Fälle eintrifft:

1:o *Es ist* $w_1 = b_1 = 1$, *und* $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$.

2:o *Es ist* $b_1 < 1$ *und es existiert eine Funktion* $w^{(2)}$ *der Klasse* E, *welche in den Punkten* $z_2, \cdots, z_n$ *die durch* (7) *bestimmten Werte* $w^{(2)}(z_\nu) = w_\nu^{(2)}$ $(\nu = 2, \cdots, n)$ *annimmt.*

Im erstgenannten Fall besteht die Klasse E_n aus einer einzigen Funktion, nämlich aus der Konstante $w \equiv w_1$ allein. Im zweiten Fall ist die Gesamtheit der Funktionen E_n gegeben durch die Formel (6), *wo $w^{(2)}$ eine beliebige Funktion der oben angegebenen Eigenschaft bezeichnet.*

26. Falls $b_1 < 1$, so wird dieses Ergebnis auf die Funktion $w^{(2)}$ angewandt. Indem dieses Verfahren immer weiter fortgesetzt wird, bestimmt man der Reihe nach die Funktionen $w^{(1)} = w$, $w^{(2)}, \cdots, w^{(k)}$ $(k \leqq n)$ durch die Rekursionsformel

$$(7)' \quad \frac{b_\nu - w^{(\nu)} e^{-i\beta_\nu}}{1 - b_\nu w^{(\nu)} e^{-i\beta_\nu}} = \frac{a_\nu - z e^{-i\alpha_\nu}}{1 - a_\nu z e^{-i\alpha_\nu}} \cdot \frac{c_\nu - w^{(\nu+1)} e^{-i\beta_\nu}}{1 - c_\nu w^{(\nu+1)} e^{-i\beta_\nu}} \, (\nu < n, w^{(1)} \equiv w),$$

wo $b_\nu e^{i\beta_\nu} = w^{(\nu)}(a_\nu e^{i\alpha_\nu})$ und $b_\nu < 1$, während c_ν eine beliebig gewählte Zahl des Intervalles $0 \leqq c_\nu < 1$ ist. Die Funktion $w^{(\nu)}$ gehört der Klasse E an; ihre Werte $w^{(\nu)}(z_\mu) = w_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = \nu, \nu + 1, \cdots, n)$ berechnen sich mit Hilfe der gegebenen Werte (1) und (2) und der Parameter c_ν aus der Formel (7)′, und zwar hängt $w_\mu^{(\nu)}$ von den μ ersten der gegebenen Werte rational ab.

Zwei Fälle sind möglich. Entweder gilt für einen Index $k \leqq n$:

$$b_\nu < 1 \text{ für } \nu < k \text{ und } b_k = 1.$$

Es ist dann $w^{(k)} \equiv e^{i\beta_k}$ und also $w_\mu^{(k)} = e^{i\beta_k}$ $(\mu = k, \cdots, n)$. Die Auflösung des Algorithmus (7)′ bestimmt w als eine rationale Funktion $(k - 1)$:er Ordnung. Nach (7)′ ist ferner für $|z| = 1$, $|w^{(\nu+1)}| = 1$ auch $|w^{(\nu)}| = 1$, und man schliesst, dass die rationale Funktion w auf dem Kreise $|z| = 1$ dem absoluten Betrage nach gleich Eins ist.

Ist wiederum $b_\nu < 1$ für $\nu = 1, \cdots, n$, so bleibt für die Funktion $w^{(n+1)}$ die einzige Bedingung übrig, der Klasse E anzugehören; die Formel (7) gibt also eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Gesamtheit der Funktionen w der Klasse E_n und der Gesamtheit der Funktionen $w^{(n+1)}$ der Klasse E.

Zusammenfassend hat man somit folgende Lösung des vorgelegten Problems:

Satz 1. *Notwendig und hinreichend, damit eine Funktion der Klasse E_n existiere ist, dass einer der folgenden zwei Fälle eintrifft.*

1:o. *Es ist für einen gewissen Wert k der Folge* $1, 2, \cdots, n$

$$(8) \quad \begin{cases} b_\nu \equiv |w_\nu^{(\nu)}| < 1 \text{ für } \nu < k, \\ b_k \equiv |w_k^{(k)}| = 1 \text{ und } w_\mu^{(k)} = w_k^{(k)} \quad (\mu = k + 1, \cdots, n). \end{cases}$$

2:o. *Es ist*

$$(9) \qquad b_\nu < 1 \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

Im ersten Fall ist die Lösung w eindeutig bestimmt; sie ist eine rationale Funktion $(k-1)$:er Ordnung, deren absoluter Betrag für $|z|=1$ konstant gleich Eins ist.

Im zweiten Fall existieren unendlich viele Funktionen w der Klasse E_n; ihre Gesamtheit ergibt sich aus dem Algorithmus (7)′, wo für $w^{(n+1)}$ eine beliebige Funktion der Klasse E eingesetzt werden soll.

27. Wir setzen zur Abkürzung

$$e^{-i\alpha_\nu}=\varepsilon_\nu,\ e^{-i\beta_\nu}=\eta_\nu$$

und finden durch Auflösung des Algorithmus (7)′

$$w=\frac{A_\nu-B_\nu w^{(\nu+1)}}{C_\nu-D_\nu w^{(\nu+1)}}\ (\nu=1,\cdots,n), \tag{10}$$

wo

$$\left|\begin{aligned}A_\nu&=(s_\nu-r_\nu z\varepsilon_\nu)A_{\nu-1}-(p_\nu+q_\nu z\varepsilon_\nu)\bar{\eta}_\nu B_{\nu-1}\\B_\nu&=(q_\nu+p_\nu z\varepsilon_\nu)\eta_\nu A_{\nu-1}+(r_\nu-s_\nu z\varepsilon_\nu)B_{\nu-1}\\C_\nu&=(s_\nu-r_\nu z\varepsilon_\nu)C_{\nu-1}-(p_\nu+q_\nu z\varepsilon_\nu)\bar{\eta}_\nu D_{\nu-1}\\D_\nu&=(q_\nu+p_\nu z\varepsilon_\nu)\eta_\nu C_{\nu-1}+(r_\nu-s_\nu z\varepsilon_\nu)D_{\nu-1}.\end{aligned}\right.\quad(\nu=1,\cdots,n). \tag{11}$$

Hier ist $A_0=D_0=0,\ B_0=-1,\ C_0=1$ und

$$\left|\begin{aligned}p_\nu&=b_\nu-a_\nu c_\nu,\\q_\nu&=c_\nu-a_\nu b_\nu,\end{aligned}\right.\qquad\left|\begin{aligned}r_\nu&=a_\nu-b_\nu c_\nu,\\s_\nu&=1-a_\nu b_\nu c_\nu.\end{aligned}\right. \tag{11$'$}$$

Es ist für das Folgende von grundlegender Bedeutung, dass die Beziehung (10) zwischen den Funktionen w und $w^{(\nu+1)}$ eine *lineare* ist. Für die Determinante findet man den Ausdruck

$$A_\nu D_\nu-B_\nu C_\nu=\prod_1^\nu\left\{(1-b_\mu^2)(1-c_\mu^2)(a_\mu-z\varepsilon_\mu)(1-a_\mu z\varepsilon_\mu)\right\}; \tag{12}$$

sie verschwindet also im Einheitskreise in den Punkten $z=a_\mu\bar{\varepsilon}_\mu=z_\mu$ $(\mu=1,\cdots,\nu)$ und nur in diesen, in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass die Funktion w in den genannten Punkten die vorgeschriebenen Werte w_μ $(\mu=1,\cdots,\nu)$ annimmt, unabhängig von der Wahl der Funktion $w^{(\nu+1)}$ der Klasse E.

28. Die Formel (10) lässt sich in interessanter Weise geometrisch interpretieren. Sei z^* ein innerer Punkt des Einheitskreises; die Gesamtheit der zulässigen Werte $w^* = w(z^*)$, wo $w(z)$ eine beliebige Funktion der Klasse E_n ist, wird im allgemeinen Fall (9) gegeben durch die Formel (10) für $\nu = n$, wobei $w^{(n+1)}$ eine beliebige Zahl bezeichnet, deren absoluter Betrag nicht grösser als Eins ist. Da nun diese Beziehung (10) linear ist, entspricht den Werten $|w^{(n+1)}| \leqq 1$ in der w-Ebene ein wohlbestimmter Kreis $C_n(z^*)$, der also den Variabilitätsbereich der möglichen Funktionswerte w^* darstellt. Wenn $|w^{(n+1)}| = 1$, so liegt w auf der Peripherie von C_n, und umgekehrt; dieser Fall trifft dann und nur dann ein, wenn $w^{(n+1)}$ eine Konstante der Form $e^{i\vartheta}$ ist und die Funktion w sich also auf eine rationale Funktion der Ordnung n von der oben angegebenen Art reduziert. Liegt wiederum der Wert w^* innerhalb des Kreises C_n, so ist $|w^{(n+1)}(z^*)| < 1$, und es existieren unendlich viele Funktionen der Klasse E_n, welche der Bedingung $w(z^*) = w^*$ genügen. Wir haben also den

Satz 2. *Unter den Bedingungen* (9) *liegt der Wert* w^*, *welchen eine Funktion der Klasse* E_n *im Punkte* z^* ($|z^*| < 1$) *annimmt, innerhalb oder auf der Peripherie eines durch die vorgegebenen Werte* (1), (2) *und den Punkt* z^* *wohlbestimmten Kreises* $C_n(z^*)$.

Ist w^* *ein Randpunkt von* C_n, *so reduziert sich die betreffende Funktion* w *auf eine wohlbestimmte rationale Funktion der Ordnung* n, *welche für* $|z| = 1$ *dem absoluten Betrage nach gleich Eins ist.*

Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas betrachtet werden, mit welchem er im Falle $n = 1$ übereinstimmt.

Indem man in der Formel (10) ν der Reihe nach die Werte $0, 1, \cdots$ gibt, sieht man, dass $C_0(z)$ ($\equiv$ der Einheitskreis), $C_1(z)$, $C_2(z)$, $\cdots$ eine Kette von ineinander geschalteten Kreisen bilden. Eine Ausnahme trifft die Punkte $z = z_\nu$ ein; sobald $\mu \geqq \nu$, reduziert sich der Kreis $C_\mu(z_\nu)$ auf den Punkt w_ν.

Mit dem obigen Resultat haben wir auch eine geometrische Deutung der Kriterien (8) und (9) gewonnen. *Die Bedingung* $b_\nu \leqq 1$ *besagt, dass der Punkt* w_ν *innerhalb oder auf der Peripherie des Kreises* $C_{\nu-1}(z_\nu)$ *liegen soll.*

Wir haben oben angenommen, dass der Punkt z innerhalb des Einheitskreises liegt. Falls $|z| = 1$, so fallen sämtliche Kreise $C_0(z)$, $C_1(z)$, $\cdots$ mit dem Einheitskreis zusammen. Für *Randwerte* der Funktion ergeben also die vorgegebenen Wertzuordnungen keinerlei Einschränkungen.

29. Bei der Lösung des vorgelegten endlichen Problems haben wir die gegebenen Werte $z_1, z_2, \cdots$ in einer bestimmten Reihenfolge genommen. Ferner haben wir gewisse willkürliche Parameter c_ν $(0 < c_\nu < 1)$ eingeführt. Man fragt sich nun, wie eine Änderung der genannten Reihenfolge und der gegebenen Parameterwerte die obigen Ergebnisse beeinflusst. Vor allem ist es für das Folgende von Bedeutung zu erkennen, wie sich die Polynome A, B, C, D in dieser Hinsicht verhalten.

Sehen wir von dem Ausnahmefall (8) ab, wo das rekurrente Verfahren abbricht und die Funktion w sich auf eine wohlbestimmte rationale Funktion reduziert, und sei

$$(10)' \qquad w = \frac{A_\nu^* - B_\nu^* w_*^{(\nu+1)}}{C_\nu^* - D_\nu^* w_*^{(\nu+1)}}$$

die zu (10) analoge Formel, zu welcher man gelangt, indem man die Werte $z_1, \cdots, z_\nu$ in einer gewissen neuen Reihenfolge nimmt und die alten Parameterwerte c durch neue c^* ersetzt.

Es sei nun $z \neq z_\mu$ $(\mu = 1, \cdots, \nu)$ ein beliebig gewählter Punkt innerhalb des Einheitskreises. Als Variabilitätsbereich der entsprechenden Wertes w der Funktionen der Klasse E_ν finden wir einerseits denjenigen Kreis $C_\nu(z)$, auf welchen die Transformation

$$(13) \qquad w = \frac{A_\nu - B_\nu t}{C_\nu - D_\nu t}$$

den Kreis $|t| \leqq 1$ abbildet, andererseits denjenigen Kreis $C_\nu^*(z)$, der vermöge

$$(13)' \qquad w = \frac{A_\nu^* - B_\nu^* \tau}{C_\nu^* - D_\nu^* \tau}$$

als Bild des Kreises $|\tau| \leqq 1$ erscheint. Diese Kreise sind also identisch und man schliesst, dass die Beziehungen (13) und (13)′ t als eine lineare Transformation von τ definieren, welche den Einheitskreis invariant lässt. Es existieren also zwei Zahlen λ ($|\lambda| < 1$) und ε ($|\varepsilon| = 1$) derart, dass

$$t = \frac{\lambda + \varepsilon\tau}{1 + \bar{\lambda}\varepsilon\tau}.$$

Führt man diesen Ausdruck in (13)′ ein, so schliesst man weiter, indem man die Koeffizienten der nach der Substitution identischen Transformationen (13)′ und (13) vergleicht, dass

$$(14) \qquad \begin{cases} A_\nu^* = \mu(A_\nu - \lambda B_\nu), & B_\nu^* = \mu\varepsilon(B_\nu - \bar{\lambda} A_\nu), \\ C_\nu^* = \mu(C_\nu - \lambda D_\nu), & D_\nu^* = \mu\varepsilon(D_\nu - \bar{\lambda} C_\nu), \end{cases}$$

wo μ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Wir behaupten nun, dass die Grössen ε, λ, μ *konstant*, d. h. von z unabhängig sind. In der Tat definieren die Relationen (14) die Grössen λ, $\bar{\lambda}$ und ε als rationale Funktionen der Polynome A_ν, A_ν^* usw. Diese Grössen sind somit analytische Funktionen von z. Es ist aber $|\varepsilon| = 1$ und $\lambda\bar{\lambda}$ reell für $|z| \leqq 1$, woraus man schliesst, dass ε und λ konstant sind.

Um einzusehen, dass auch μ konstant ist, bemerke man, dass das Verhältnis der Determinanten $A_\nu D_\nu - B_\nu C_\nu$ und $A_\nu^* D_\nu^* - B_\nu^* C^*$ gemäss Formel (12) von z unabhängig ist. Andererseits ergibt sich aber aus (14) für dieses Verhältnis der Wert $\varepsilon(1 - |\lambda|^2)\mu^2$, woraus die Behauptung folgt.

Ändert man in den Polynomen A_ν, B_ν, C_ν und D_ν die Reihenfolge der Wertpaare (z_μ, w_μ) $(\mu = 1, \cdots, \nu)$ und die Werte der Parameter c_μ, so transformieren sich die Polynome gemäss den Formeln (14), *wo die Koeffizienten konstant sind und* $|\varepsilon| = 1$, $|\lambda| < 1$.

30. Wir wollen zuletzt einige weitere Eigenschaften der oben betrachteten Polynome besprechen, die uns im Folgenden nützlich sein werden. Aus den Rekursionsformeln (11) folgt, dass

$$A_\nu(z) = -e^{i\vartheta_\nu} z^\nu D_\nu\left(\frac{1}{\bar z}\right), \quad B_\nu(z) = -e^{i\vartheta_\nu} z^\nu \bar C_\nu\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo $\vartheta_\nu = -\sum_1^\nu a_\nu$. Für $|z| = 1$ gilt also

$$(15) \qquad |A_\nu(z)| = |D_\nu(z)|, \quad |B_\nu(z)| = |C_\nu(z)|,$$

und da die Beziehung (10) für einen solchen Wert z eine lineare Transformation darstellt, welche den Kreis $|w^{(\nu+1)}| \leqq 1$ auf $|w| \leqq 1$ abbildet, so ist

$$(15)' \qquad |C_\nu(z)| > |D_\nu(z)|$$

in jedem Punkt der Peripherie $|z| = 1$.

Das Polynom C_ν ist im Einheitskreise von Null verschieden.

Nimmt man nämlich an, dass in einem Punkt $z = z^*$ des Einheitskreises $C_\nu = 0$, so muss in diesem Punkte auch $A_\nu = 0$ sein, weil der Quotient $A_\nu : C_\nu$ gemäss der Formel (10) als eine Funktion der Klasse E_ν für $z = z^*$ regulär ist. Hieraus folgt unter Beachtung der Relation (12), dass $z^* = z_\mu$, wo z_μ einen der gegebenen Punkte $z_1, \cdots, z_\nu$ bezeichnet, und weiter dass

$$(16) \qquad A'_\nu D_\nu - B_\nu C'_\nu \neq 0 \text{ für } z = z_\mu.$$

Andererseits folgt aber aus der Formel (10) für $z = z_\mu$, wenn man zuerst $w^{(\nu+1)} = 0$, dann $w^{(\nu+1)}$ einem von Null verschiedenen Wert gleich setzt, dass

$$w_\mu = \frac{A'_\nu(z_\mu)}{C'_\nu(z_\mu)} = \frac{B_\nu(z_\mu)}{D_\nu(z_\mu)},$$

was im Widerspruch zu (16) steht. Man schliesst somit, dass $C_\nu \neq 0$ für $|z| \leqq 1$, w. z. b. w.

Dividiert man nun die Polynome A_ν, B_ν und D_ν durch C_ν, so folgt dass

$$(17) \qquad \left|\frac{A_\nu}{C_\nu}\right| \leqq 1, \quad \left|\frac{B_\nu}{C_\nu}\right| \leqq 1, \quad \left|\frac{D_\nu}{C_\nu}\right| \leqq 1;$$

diese Beziehungen bestehen nämlich nach (15) und (15)′ auf der Peripherie $|z| = 1$, und sind deshalb auch im Innern des Einheitskreises gültig.

§ 2. Fall, wo die Anzahl der gegebenen Werte unendlich ist.

31. In diesem Abschnitt werden wir den allgemeinen Fall untersuchen, wo die Anzahl der vorgegebenen Werte

$$(18) \qquad z_1, \cdots, z_n, \cdots \qquad (z_n = a_n e^{i\alpha_n}, a_n < 1)$$

und

$$(19) \qquad w_1, \cdots, w_n, \cdots$$

unendlich ist. Die Klasse derjenigen Funktionen $w(z)$, welche der Eigenschaft E:

$$|w(z)| \leqq 1 \text{ für } |z| < 1$$

genügen und in den Punkten (18) die entsprechenden Werte (19) annehmen:

$$w(z_n) = w_n,$$

bezeichnen wir mit E_∞.

32. Die *Existenzbedingungen* ergeben sich sofort als eine Folgerung des Satzes 1, S. 31.

Satz 3. *Notwendig und hinreichend, damit eine Funktion der Klasse E_∞ existiert, ist, dass einer der folgenden zwei Fälle eintrifft:*

1:o *Es ist für eine gewisse ganze Zahl n:*

$$(20)' \qquad b_\nu < 1 \ (\nu < n), \ b_n = 1 \ \textit{und} \ w_\mu^{(n)} = w_n^{(n)} \quad (\mu = n, n+1, \cdots).$$

2:o *Es ist*

$$(20) \qquad b_\nu < 1 \quad (\nu = 1, \cdots, n, \cdots).$$

Dass diese Bedingungen notwendig sind, ist auf Grund des zitierten Satzes unmittelbar klar. Ebenso schliesst man, dass die

Bedingungen $(20)'$ hinreichend sind, denn die durch die Formel (10) (S. 32) für $\nu = n - 1$ und für $w^{(n)} \equiv w_n^{(n)}$ definierte rationale Funktion $R_n(z)$ gehört offenbar der Klasse E_∞ an.

Um zu beweisen, dass eine Funktion der Klasse E_∞ auch unter den Bedingungen (20) existiert, setze man in der Formel (10) für $w^{(\nu+1)}$ eine beliebige Funktion der Klasse E ein, z. B. $w^{(\nu+1)} = 0$; die Funktion

$$\frac{A_\nu(z)}{C_\nu(z)} \tag{21}$$

gehört zur Klasse E_ν. Wenn nun ν die Folge $1, 2, \cdots$ durchläuft, so lässt sich nach dem Stieltjes-Vitalischen Satze aus (21) eine für $|z| \leq r < 1$ gleichmässig konvergente Teilfolge herauswählen, und die Grenzfunktion stellt offenbar eine Funktion der Klasse E_∞ dar. Hiermit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

33. Wir werden im Folgenden annehmen, dass die Bedingungen (20) oder $(20)'$ erfüllt sind, und wenden uns zu der Frage, wann das vorgelegte Problem *bestimmt* ist, d. h. wann eine einzige Lösung des Problems existiert.

Zunächst folgt aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes, dass der Bestimmtheitsfall immer unter den Bedingungen $(20)'$ vorliegt: die Klasse E_∞ besteht aus der oben besprochenen rationalen Funktion R_n allein.

Wir können also im Folgenden annehmen, dass die Bedingungen (20) erfüllt sind. In diesem Fall wird Satz 2, S. 33, uns sofort ein Kriterium für die Bestimmtheit des Problems geben. Es sei nämlich $w(z)$ eine Funktion der Klasse E_∞; dann gehört sie a fortiori zu jeder der Klassen E_n $(n = 1, 2, \cdots)$. Nach dem soeben erwähnten Satz liegt also für einen beliebigen Wert z $(|z| < 1)$ der Wert $w(z)$ in sämtlichen Kreisen

$$C_n(z) \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

Nun liegt aber der Kreis C_{n+1} innerhalb C_n und man schliesst also, dass der Kreis $C_n(z)$ für $n \to \infty$ gegen einen wohlbestimmten Grenzkreis $C_\infty(z)$ konvergiert; der Wert $w(z)$ muss somit in

diesen Kreis $C_\infty(z)$ fallen. Hieraus folgt, dass unser Problem sicher bestimmt ist, falls der Kreis $C_\infty(z)$ sich für jeden Punkt z des Einheitskreises *auf einen Punkt* reduziert.

Nehmen wir umgekehrt an, dass für einen gewissen Punkt $z = z^*$ ($|z^*| < 1$) der Radius $\varrho_\infty(z^*)$ von $C_\infty(z^*)$ *positiv* ist, und seien w_1^* und w_2^* zwei verschiedene Punkte dieser Kreisscheibe. Nach den Ergebnissen des ersten Paragraphen (vgl. inbesondere S. 33) existieren zwei Funktionen $f_n^{(1)}(z)$ und $f_n^{(2)}(z)$ der Klasse E_n derart, dass $f_n^{(1)}(z^*) = w_1^*$ und $f_n^{(2)}(z^*) = w_2^*$. Lässt man nun n unbeschränkt wachsen, so ergibt sich unter Anwendung des Vitalischen Satzes die Existenz von zwei Funktionen der Klasse E_∞, $f_\infty^{(1)}(z)$ und $f_\infty^{(2)}(z)$, derart dass $f_\infty^{(1)}(z^*) = w_1^*$ und $f_\infty^{(2)}(z^*) = w_2^*$. Diese Funktionen sind somit unter einander verschieden, und das Problem ist unbestimmt.

Satz 4. *Notwendig und hinreichend, damit das Problem unbestimmt sei, ist, dass der Radius $\varrho_\infty(z)$ des Kreises $C_\infty(z)$ für wenigstens einen inneren Punkt z des Einheitskreises einen positiven Wert hat.*

34. Aus dem obigen Resultat lässt sich leicht ein interessantes, von Herrn Denjoy[1]) neulich angebenes Bestimmtheitskriterium ableiten.

Zu diesem Zweck wählen wir mit Herrn Denjoy die willkürlichen Parameter c_n in folgender Weise

(22) $$c_n = a_n b_n.$$

Diese Festsetzung hat zur Folge, dass der Ausdruck $q_n = 0$ und dass also (vgl. (11), S. 32) das Polynom D_n im Nullpunkte verschwindet, was, wie wir sehen werden, die sogleich vorzunehmende Abschätzung des Radius $\varrho_\infty(z)$ wesentlich erleichtert. Gleichzeitig bietet diese Wahl den Vorteil, dass der Übergang zu dem Grenzfall, wo die gegebenen Punkte z_n auf der Peripherie des Einheitskreises belegen sind, in einer zu der S. 20 angebenen analogen

1) Vgl. die in der Einleitung S. 4 zitierten Noten.

Weise durchgeführt werden kann. Im Folgenden werden wir, falls Anderes nicht ausdrücklich gesagt wird, die Parameter c_n immer durch die Bestimmungen (22) festgelegt denken.

Für den Radius des Kreises $C_n(z)$, welcher den Variabilitätsbereich des Wertes $w(z)$ einer Funktion der Klasse E_n darstellt, finden wir gemäss (10) nach einer einfachen Rechnung den Ausdruck

$$\varrho_n(z) = \frac{A_n D_n - B_n C_n}{|C_n|^2 - |D_n|^2}. \tag{23}$$

Insbesondere wird unter Beachtung der Rekursionsformeln (11) und (12), S. 32, da $D_n(0) = 0$,

$$\varrho_n(0) = \left[\frac{A_n D_n - B_n C_n}{C_n^2}\right]_{z=0} = \prod_1^n \frac{a_\nu(1 - b_\nu^2)}{1 - a_\nu^2 b_\nu^2}. \tag{24}$$

Der Grenzwert $\varrho_\infty(0)$ ist also positiv oder Null, je nachdem die Reihe

$$\sum^\infty \left(1 - \frac{a_\nu(1 - b_\nu^2)}{1 - a_\nu^2 b_\nu^2}\right) = \sum^\infty \frac{(1 + a_\nu b_\nu^2)(1 - a_\nu)}{1 - a_\nu^2 b_\nu^2}$$

konvergent oder divergent ist. Das allgemeine Glied dieser Reihe liegt zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{2}\frac{1 - a_\nu}{1 - a_\nu b_\nu} \text{ und } \frac{1 - a_\nu}{1 - a_\nu b_\nu},$$

und da die Reihen

$$\sum \frac{1 - a_\nu}{1 - a_\nu b_\nu} \text{ und } \sum \frac{1 - a_\nu}{1 - b_\nu}$$

offenbar gleichzeitig konvergent oder divergent sind, so schliesst man, dass $\varrho_\infty(0) >$ oder $= 0$, je nachdem die Reihe

$$\sum \frac{1 - a_\nu}{1 - b_\nu} \tag{25}$$

konvergent oder divergent ist. Also gilt nach Satz 4:

Wenn die Reihe (25) *konvergiert, so ist das Problem unbestimmt.*

35. Die Umkehrung dieses Satzes ist auch richtig: *Das Problem ist bestimmt, sobald die Reihe* (25) *divergiert.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass der Quotient $D_n : C_n$ nach (17) S. 37 für $|z| \leqq 1$ dem absoluten Betrage nach nicht grösser als Eins ist und für $z = 0$ verschwindet. Nach dem Schwarzschen Lemma ist somit

$$|D_n| \leqq |z|\, |C_n| \quad \text{für } |z| \leqq 1,$$

und also, unter Beachtung der Formel (23),

(26) $$|\varphi_n(z)| \leqq \varrho_n(z) \leqq \frac{|\varphi_n(z)|}{1 - |z|^2} \qquad (|z| < 1),$$

wo

(26)' $$\varphi_n = \frac{A_n D_n - B_n C_n}{C_n^2}.$$

Nach (26) genügt es zu zeigen, dass φ_n in jedem Punkt z ($|z| < 1$) für $n \to \infty$ gegen Null strebt, falls die Reihe (25) divergent ist.

Es ist $\varrho_n < 1$ und also (nach (26)) auch $|\varphi_n| < 1$ für $|z| < 1$; ferner ist $\varrho_n = \varphi_n = 0$ in den Punkten $z = z_\nu$ und nur in diesen. Nimmt man zunächst an, dass die gegebenen Punkte z_ν sich im Punkte $z = 0$ häufen, so muss ϱ_n nach dem Vitalischen Satz in jedem inneren Punkt des Einheitskreises gegen Null konvergieren.

Häufen sich die Punkte z_ν dagegen nicht im Punkte $z = 0$, so existiert eine positive Zahl $r < 1$ derart, dass die Funktionen φ_n ($n = 1, 2, \cdots$) im Kreise $|z| < r$ von Null verschieden sind; wir werden beweisen, dass innerhalb dieses Kreises $\varphi_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Hierzu beachte man, dass wegen der vorausgesetzten Divergenz der Reihe (25), $|\varphi_n(0)| = \varrho_n(0) \to 0$ für $n \to \infty$. Nun gilt aber der Satz, dass eine im Einheitskreise beschränkte und von Null verschiedene Funktion, $\varphi_n\left(\frac{z}{r}\right)$, welche im Nullpunkte für $n \to \infty$ verschwindet, in jedem Punkt des Kreises für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Der Beweis lässt sich bekanntlich mittels des Schwarzschen Lemmas in folgender Weise führen.

Jeder Zweig der Funktion $\log \varphi_n\left(\frac{z}{r}\right)$ ist eindeutig und hat einen negativen reellen Teil für $|z| < 1$. Es sei $\psi_n(z)$ einer dieser Zweige; die Werte von ψ_n fallen also für $|z| < 1$ in die linke Halbebene $R(\psi_n) < 0$. Überträgt man nun in bekannter Weise, durch konforme Abbildung des Einheitskreises auf diese Halbebene, die in jenem Kreis eingeführte nichteuklidische Massbestimmung auf die Halbebene, so schliesst man nach dem SCHWARZschen Lemma, dass die nichteuklidische Entfernung zwischen den Punkten $\psi_n(0)$ und $\psi_n(z)$, wo z ein beliebiger Punkt innerhalb des Einheitskreises ist, nicht grösser ist als der im Einheitskreise nichteuklidisch gemessene Abstand des Punktes z vom Nullpunkte. Da also die erstgenannte Entfernung für jedes n unter einer festen endlichen Schranke liegt und $R(\psi_n(0)) = \log|\varphi_n(0)|$ voraussetzungsgemäss gegen $-\infty$ strebt, so gilt auch: $R(\psi_n(z)) = \log\left|\varphi_n\left(\frac{z}{r}\right)\right| \to -\infty$ für $n \to \infty$, womit der Satz bewiesen ist.

Weil nun $\varphi_n(z) \to 0$ in dem Kreis $|z| < r$, so gilt dasselbe nach dem Satz von STIELTJES-VITALI in jedem Punkt des Einheitskreises, und es ist also, wie behauptet wurde, $\varrho_\infty(z) = 0$ für $|z| < 1$.

Zusammenfassend gilt also folgender

Satz 5 (*von* DENJOY). *Das Problem ist bestimmt dann und nur dann, wenn die Reihe*

$$\sum \frac{1-a_\nu}{1-b_\nu} \tag{25}$$

divergiert[1]).

36. Wir nehmen im Folgenden die Reihe (25) konvergent an und suchen die Gesamtheit der Lösungen des Interpolationsproblems zu bestimmen. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass die

[1]) Vgl. die in der Einleitung S. 4 zitierten Noten von Herrn DENJOY. — Falls die gegebenen Funktionswerte $w_1, w_2, \cdots$ sämtlich gleich Null sind, so ist auch $b_1 = b_2 = \cdots = 0$, und man findet einen bekannten Satz von Herrn BLASCHKE über das identische Verschwinden beschränkter Funktionen wieder. Vgl. W. BLASCHKE: *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen* (Leipziger Berichte, B. 67, 1915.)

oben betrachtete Funktion φ_n gemäss (10) und den Rekursionsformeln (11) S. 32 sich in folgender Form schreiben lässt

(27) $$\varphi_n = \frac{\prod_1^n \left[(1-b_\nu^2)(1-c_\nu^2)(1-a_\nu z\varepsilon_\nu)^2\right]}{C_n^2} \Pi_n(z),$$

wo

(28) $$\Pi_n(z) = \prod_1^n \frac{a_\nu - z\varepsilon_\nu}{1 - a_\nu z\varepsilon_\nu}$$

und also $|\Pi_n| <$ oder $= 1$, je nachdem $|z| <$ oder $= 1$ ist. Da andererseits auch $|\varphi_n| \leqq 1$ für $|z| \leqq 1$ ist, so schliesst man mittels des Modulprinzips, dass der Quotient $\varphi_n : \Pi_n$ ebenfalls nicht grösser als Eins ist für dieselben Werte z. Dieser Quotient ist ferner im Einheitskreise von Null verschieden, und wir haben also folgendes Ergebnis:

Die rationale Funktion

(29) $$R_n(z) = p_n(z)\, C_n(z),$$

wo[1])

$$p_n = \prod_1^n \frac{(1-b_\nu)^{-\frac{1}{2}}(1-c_\nu)^{-\frac{1}{2}}}{1 - a_\nu z\varepsilon_\nu},$$

ist für $|z| \leqq 1$ *regulär, und es gilt*

(30) $$|R_n(z)| \geqq 1 \text{ für } |z| \leqq 1.$$

Wir ersetzen nunmehr auch die Polynome A, B, D durch die rationalen Funktionen

(31) $$P_n = p_n A_n,\; Q_n = p_n B_n,\; S_n = p_n D_n,$$

welche sämtlich für $|z| \leqq 1$ regulär sind und gemäss (15) und (17), S. 37, folgenden Bedingungen genügen:

$$|P_n| = |S_n|,\; |Q_n| = |R_n| \text{ für } |z| = 1,$$

(32) $$\left|\frac{P_n}{R_n}\right| < 1,\; \left|\frac{S_n}{R_n}\right| < 1,\; \left|\frac{Q_n}{R_n}\right| < 1 \text{ für } |z| < 1.$$

[1]) Man nehme hier die positiven Werte der Quadratwurzeln.

Für die Determinante haben wir gemäss (12) S. 32 den Ausdruck

$$P_n S_n - Q_n R_n = \Pi_n(z).$$

Wir bemerken sofort, dass sie für $n \to \infty$ gegen die innerhalb des Einheitskreises reguläre, nicht identisch verschwindende Funktion

$$\Pi(z) = \prod_1^\infty \frac{a_\nu - z\varepsilon_\nu}{1 - a_\nu z \varepsilon_\nu}$$

konvergiert. In der Tat impliziert die vorausgesetzte Konvergenz der Reihe (25) die Konvergenz der Reihe

$$\sum^\infty (1 - a_\nu),$$

und dies stellt bekanntlich (und wie leicht zu prüfen ist) die notwendige und hinreichende Bedingung dar, damit das Produkt Π konvergent sei.

37. Nach dem VITALIschen Satze können wir nun aus der Folge der beschränkten Funktionen

$$\frac{1}{R_n}$$

eine für $|z| \leqq r < 1$ konvergente Teilfolge herauswählen; die Grenzfunktion verschwindet nicht identisch, sonst würde nach (27) die entsprechende Folge φ_n für $|z| < 1$ gegen Null streben, und es wäre (gemäss (26)) $\varrho_\infty(z) = 0$ für jedes $|z| < 1$, was nicht möglich ist, da wir uns im Unbestimmtheitsfalle befinden. Die entsprechende Teilfolge R_n konvergiert also gegen eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion $R(z)$, welche der Bedingung $|R| \geqq 1$ für $|z| < 1$ genügt.

Unter Beachtung der ersten der Beziehungen (32) schliessen wir ferner, dass aus der obigen Teilfolge der Indizes n eine neue Teilfolge herausgewählt werden kann derart, dass die entsprechenden Funktionen P_n innerhalb des Einheitskreises konvergieren; in-

dem man in dieser Weise weiter verfährt, gelangt man zu folgendem Ergebnis:

Aus der Folge $1, 2, \cdots$ *lässt sich eine unendliche Teilfolge* n_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ *herauswählen, so dass die rationalen Funktionen* $P_{n_\nu}, Q_{n_\nu}, R_{n_\nu}, S_{n_\nu}$ *für* $|z| \leqq r < 1$ *und* $\nu \to \infty$ *gleichmässig konvergieren.*

Die Grenzfunktionen $P(z), Q(z), R(z)$ und $S(z)$ sind sämtlich innerhalb des Einheitskreises regulär und ihre Determinante ist gleich

$$PS - RQ = \Pi(z) \equiv \prod_1^\infty \frac{a_\nu - z\varepsilon_\nu}{1 - a_\nu z \varepsilon_\nu}. \tag{33}$$

Ferner gilt für $|z| < 1$

$$|P| \leqq |R|, \quad |Q| \leqq |R|, \quad |S| \leqq |R|. \tag{34}$$

38. Es sei nun w eine beliebige Funktion der Klasse E_∞; man hat dann für jedes n

$$w = \frac{A_n - B_n w^{(n+1)}}{C_n - D_n w^{(n+1)}} = \frac{P_n - Q_n w^{(n+1)}}{R_n - S_n w^{(n+1)}}, \tag{35}$$

wo $w^{(n+1)}$ eine Funktion der Klasse E ist. Löst man nun (35) in bezug auf $w^{(n+1)}$ auf und lässt man die Indizes n die Folge n_ν durchlaufen, so ergibt sich die Existenz des Grenzwertes[1])

$$\lim_{\nu = \infty} w^{(n+1)} = \frac{P - Rw}{Q - Sw} \text{ für } |z| < 1.$$

Diese Grenzfunktion, die wir kurz mit w_∞ bezeichnen, gehört notwendigerweise der Klasse E an, und wir haben also für w die Darstellung

$$w = \frac{P - Qw_\infty}{R - Sw_\infty}. \tag{36}$$

[1]) Man bemerke, dass die Determinanten der Koeffizienten P_n, Q_n, R_n, S_n und ihrer Grenzwerte für $z \neq z_\nu$ von Null verschieden sind.

Setzt man aber umgekehrt w_∞ gleich einer beliebigen Funktion der Klasse E, so gehört die durch (36) bestimmte Funktion w der Klasse E_∞ an. In der Tat: die Funktion

$$\frac{P_n - Q_n w_\infty}{R_n - S_n w_\infty}$$

ist eine Funktion der Klasse E_n; lässt man nun n durch die Werte n_ν ins Unendliche wachsen, so strebt dieser Ausdruck für $|z| < 1$ gegen die linke Seite von (36), welche also, als Grenzfunktion einer Funktion der Klasse E_{n_ν}, der Klasse E_∞ angehören muss.

Wir können somit folgendes Ergebnis aussprechen:

Satz 6. *Im Unbestimmtheitsfalle wird die Gesamtheit der Lösungen w des Problems definiert durch die Formel* (36), *wo P, Q, R, S Grenzfunktionen der rationalen Funktionen P_{n_ν}, Q_{n_ν}, R_{n_ν}, S_{n_ν} sind und w_∞ eine beliebige Funktion bezeichnet, deren absoluter Betrag im Einheitskreise nicht grösser als Eins ist.*

39. Es hat ein gewisses Interesse nachträglich zu bestätigen, dass die Funktionen P_n, Q_n, R_n, S_n ohne irgendeine Auswahl für $n \to \infty$ gegen die oben betrachteten Grenzfunktionen konvergieren. Im entgegengesetzten Fall könnte man nämlich, indem man die Überlegungen der Nummer 37 wiederholt, aus der Folge der Indizes n eine neue Teilfolge n_μ $(\mu = 1, 2, \cdots)$ auswählen, so dass die rationalen Funktionen P_{n_μ}, Q_{n_μ}, R_{n_μ}, S_{n_μ} gegen gewisse Grenzfunktionen P^*, Q^*, R^*, S^* streben, von denen wenigstens eine nicht identisch ist mit der entsprechenden der oben betrachteten Grenzfunktionen P, Q, R, S.

Für die Gesamtheit der Funktionen der Klasse E_∞ hat man so den neuen Ausdruck

$$w = \frac{P^* - Q^* w^*_\infty}{R^* - S^* w^*_\infty},$$

wo w^*_∞ eine beliebige Funktion der Klasse E ist. Beachtet man nun, was S. 35 über die verschiedenen Darstellungen einer Funk-

tion der Klasse E_n gesagt wurde, so ergibt sich, da diese Bemerkungen offenbar ihre Giltigkeit für die Klasse E_∞ behalten, dass

$$(37)\qquad \begin{cases} P^* = \mu\,(P - \lambda Q), & Q^* = \mu\varepsilon\,(Q - \bar{\lambda} P), \\ R^* = \mu\,(R - \lambda S), & S^* = \mu\varepsilon\,(S - \bar{\lambda} R), \end{cases}$$

wo ε ($|\varepsilon| = 1$), λ und μ ($\neq 0$) von z unabhängig sind.

Ferner haben die neuen Grenzfunktionen, wie aus ihrer Definition unmittelbar folgt, folgende Eigenschaften mit den alten gemeinsam:

$$(38)\qquad \begin{gathered} P^* S^* - Q^* R^* = PS - QR = \prod_1^\infty \frac{a_\nu - z\varepsilon_\nu}{1 - a_\nu z \varepsilon_\nu}, \\ S^*(0) = S(0) = 0,\ R_\nu^*(0) > 0,\ R_\nu(0) > 0. \end{gathered}$$

Setzt man nun in (37) $z = 0$, so folgt, dass $S^*(0) = \mu\varepsilon(S(0) - \bar{\lambda} R(0))$ und somit $\mu\varepsilon\bar{\lambda} R(0) = 0$, woraus $\lambda = 0$. Ferner ist $R^*(0) = \mu R(0)$; der Faktor μ ist somit reell und positiv. Schliesslich ergibt (37) für das Verhältnis der Determinanten der neuen und der alten Grenzfunktionen den Wert $\mu^2 \varepsilon$; nach (38) ist dieses Verhältnis gleich Eins, und es ist also $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Somit würden die Funktionen P^* usw. identisch mit den Funktionen P usw. sein, im Widerspruch zu dem oben Gesagten.

Hiermit ist die behauptete Konvergenz der Folgen P_n, Q_n, R_n und S_n ($n = 1, 2, \cdots$) nachgewiesen.

40. Der Kreis $C_\infty(z)$, welcher das Variabilitätsgebiet der (dem Punkt z ($|z| < 1$) entsprechenden) Werte w der Funktionen E_∞ darstellt, ergibt sich mittels der Formel (36) als Bild des Einheitskreises $|w_\infty| \leqq 1$, wenn man w_∞ als eine unabhängige Veränderliche betrachtet.

Fällt der Wert $w(z)$ auf die Peripherie dieses Kreises, so ist die entsprechende Funktion $|w_\infty| = 1$ für den betrachteten inneren Punkt z und es ist also $|w_\infty(z)| \equiv 1$, $w_\infty \equiv e^{i\vartheta}$ (ϑ konstant), und somit

$$(39)\qquad w = \frac{P - Q e^{i\vartheta}}{R - S e^{i\vartheta}}.$$

Für diese Funktionen und nur für diese sind die Punkte, welche die Funktionswerte darstellen, auf den Peripherien der Kreise $C_\infty(z)$ belegen.

Ist w dagegen ein innerer Punkt des Kreises $C_\infty(z)$, wo z ein beliebiger innerer Punkt des Einheitskreises ist, so existieren immer unendlich viele Funktionen $w(z)$ der Klasse E_∞, so dass $w = w(z)$.

41. Nach einem bekannten Satz von Herrn FATOU strebt eine Funktion der Klasse E bei radialer Annäherung an einen Punkt $\zeta = e^{i\varphi}$ des Einheitskreises gegen einen wohlbestimmten Grenzwert, ausser möglicherweise für eine Nullmenge φ. Die extremalen Funktionen (39) der Klasse E_∞ besitzen nun folgende interessante Eigenschaft:

Satz 7. *Es ist* $|w(re^{i\varphi})| \to 1$ *für* $r \to 1$, *ausser möglicherweise für eine Wertmenge* φ *vom Masse Null.*

Beweis. — Wäre die Behauptung falsch, so müsste eine Zahl $h < 1$ existieren, so dass

$$(40) \qquad |w(e^{i\varphi})| = \lim_{r=1} |w(re^{i\varphi})| \leq h$$

für eine Wertmenge (φ) *vom positiven Mass* $2\pi m$ $(0 < m \leq 1)$.

Um nachzuweisen, dass diese Antithese zu einem Widerspruch führt, bemerken wir zunächst, dass $w(z)$ als eine Funktion der Klasse E_n sich für jedes n in der Form

$$(41) \qquad w(z) = \frac{P_n(z) - Q_n(z)\, w^{(n+1)}(z)}{R_n(z) - S_n(z)\, w^{(n+1)}(z)}$$

darstellen lässt, wo die Funktion $w^{(n+1)}(z)$ der Klasse E angehört. Die rationalen Funktionen P_n usw. sind im abgeschlossenen Einheitskreis stetig; in jedem Punkt $z = e^{i\varphi}$, wo der Grenzwert $w(e^{i\varphi})$ (bei radialer Annäherung) existiert, hat man auch einen Grenzwert $w^{(n+1)}(e^{i\varphi})$ für die Funktion $w^{(n+1)}$, und zwar ist

$$(41)' \qquad w(e^{i\varphi}) = \frac{P_n(e^{i\varphi}) - Q_n(e^{i\varphi})\, w^{(n+1)}(e^{i\varphi})}{R_n(e^{i\varphi}) - S_n(e^{i\varphi})\, w^{(n+1)}(e^{i\varphi})}.$$

Diese Formel erlaubt uns nun die Grenzwerte $|w^{(n+1)}(e^{i\varphi})|$ für die Wertmenge (φ) abzuschätzen. Hierzu müssen wir aber, etwas genauer als dies oben (S. 43) geschehen ist, das Verhalten des Quotienten $P_n : R_n$ untersuchen. Wir erinnern daran, dass die rechte Seite von (41)′, wenn man φ einen festen Wert gibt und dann $w^{(n+1)}$ als eine freie Veränderliche betrachtet, eine lineare Transformation darstellt, welche den Einheitskreis $|w^{(n+1)}| \leqq 1$ invariant lässt (vgl. S. 34). Für den Radius $\varrho_n(e^{i\varphi})$ hat man also den Wert

$$\frac{|P_n S_n - Q_n R_n|}{|R_n|^2 - |S_n|^2} = 1.$$

Der Zähler ist aber nach (33) gleich dem Produkt $|\Pi_n| = 1$, und es ist also

$$|R_n|^2 - |S_n|^2 = 1 \text{ für } |z| = 1.$$

Ferner gilt für dieselben Werte z nach (15), S. 36, $|S_n| = |P_n|$, und es ist also auch $|R_n|^2 - |P_n|^2 = 1$ oder

$$(42) \qquad \left|\frac{P_n(e^{i\varphi})}{R_n(e^{i\varphi})}\right|^2 = 1 - \left|\frac{1}{R_n(e^{i\varphi})}\right|^2.$$

Weil nun $R_n(0)$ für $n \to \infty$ gegen den endlichen Wert $R(0)$ strebt, so existiert eine nur von den gegebenen Werten z_ν, w_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ abhängige endliche Zahl M_0, so dass

$$|R_n(0)| < M_0 \text{ für } n = 0, 1, \cdots.$$

Nach dem Gaussschen Mittelwertsatz ist dann

$$\log M_0 > \log |R_n(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |R_n(e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Bezeichnet man nun mit k eine positive Zahl und mit $2\pi\mu(k)$ das Mass derjenigen Werte φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$, für welche

$$\log |R_n(e^{i\varphi})| > k,$$

so ist also, da der Integrand positiv ist, der obige Mittelwert grösser als $k\mu(k)$, und somit

$$\mu(k) < \frac{1}{k} \log M_0 .$$

Für $k = \frac{2}{m} \log M_0$ ergibt sich demnach: Es ist

$$\log |R_n(e^{i\varphi})| \leq \frac{2}{m} \log M_0$$

und also nach (42)

$$\left| \frac{P_n(e^{i\varphi})}{R_n(e^{i\varphi})} \right| \leq \sqrt{1 - M_0^{-\frac{4}{m}}} \tag{43}$$

für alle Werte φ, ausser möglicherweise für eine Wertmenge, deren Mass nicht πm übersteigt. Da nun die Menge (φ), wofür die Antithese (40) als giltig vorausgesetzt ist, das Mass $2\pi m$ hat, so folgt, dass *die Ungleichungen* (40) *und* (43) *gleichzeitig bestehen für eine Wertmenge* $(\varphi)_n$, *deren Mass wenigstens gleich* πm *ist.*

Wir kehren nun zu den Formel (41)′ zurück und setzen für φ einen beliebigen Wert der Menge $(\varphi)_n$ ein. Da $w = \frac{P_n(e^{i\varphi})}{R_n(e^{i\varphi})}$ für $w^{(n+1)} = 0$, so ist der nichteuklidische Abstand $[w^{(n+1)}(e^{i\varphi}), 0]$ gleich dem Abstand $\left[w(e^{i\varphi}), \frac{P_n(e^{i\varphi})}{R_n(e^{i\varphi})}\right]$ und also (für $z = e^{i\varphi}$)

$$[w^{(n+1)}, 0] = \left[w, \frac{P_n}{R_n}\right] \leq [w, 0] + \left[\frac{P_n}{R_n}, 0\right].$$

Beachtet man nun, dass (vgl. S. 9)

$$[t, 0] = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |t|}{1 - |t|},$$

so schliesst man gemäss (40) und (43), dass die rechts stehenden Abstände unter endlichen, von n unabhängigen Schranken liegen; dasselbe gilt also auch für $[w^{(n+1)}, 0]$, woraus weiter folgt, dass *eine von* n *unabhängige Zahl* Θ *des Intervalles* $0 < \Theta < 1$ *existiert, so dass*

(44) $$|w^{(n+1)}(e^{i\varphi})| < \Theta < 1$$

für jeden Wert φ der Menge $(\varphi)_n$.

Der in Aussicht gestellte Widerspruch ergibt sich nunmehr leicht. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz ist

$$|w^{(n)}(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |w^{(n)}(re^{i\varphi})|\, d\varphi;$$

da der Grenzübergang $r \to 1$ unter dem Integralzeichen erlaubt ist, so gilt diese Ungleichung auch wenn man den Integranden durch seinen fast überall existierenden Grenzwert $|w^{(n)}(e^{i\varphi})|$ ersetzt. Der Mittelwert dieser Grenzwerte wird vergrössert, wenn man den Integranden durch Θ für die Menge $(\varphi)_{n-1}$ und durch Eins für die Komplementärmenge ersetzt, und man findet somit, weil das Mass von $(\varphi)_n$ wenigstens gleich πm ist, dass

$$|w^{(n)}(0)| < 1 - \frac{m(1-\Theta)}{2}$$

für jedes n. Dies ist andererseits nicht möglich, denn nach (41) und (39) gilt

$$|w^{(n)}(0)| \to |e^{i\vartheta}| = 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

42. Zum Schluss machen wir auf einen besonders einfachen Spezialfall der oben erzielten Ergebnisse aufmerksam. Wenn die vorgegebenen Funktionswerte w_n alle gleich Null sind, so wird $b_n = c_n = 0$, und nach (11) S. 32 und (29) S. 43

$$P_n = S_n = 0, \; R_n = 1, \; Q_n = -\prod_1^n \frac{a_\nu - z\varepsilon_\nu}{1 - a_\nu z\varepsilon_\nu}.$$

Wenn die Reihe

$$\sum^\infty \frac{1-a_n}{1-b_n} = \sum^\infty (1-a_n)$$

divergent ist, so ist das Problem bestimmt und seine einzige Lösung ist $w = 0$. Im Falle der Konvergenz der Reihe hat man dagegen eine unendliche Anzahl von Lösungen, deren Gesamtheit durch die Formel

$$w = w_\infty \prod_1^\infty \frac{a_n - z\varepsilon_n}{1 - \bar{a}_n z\varepsilon_n}$$

gegeben ist, wo w_∞ eine beliebige Funktion der Klasse E ist. Man findet somit den bekannten (schon oben zitierten) Satz von BLASCHKE wieder (vgl. die Fussnote S. 42).

Es folgt ferner aus unserem zuletzt bewiesenen Satz die ebenfalls bekannte Tatsache, dass das BLASCHKEsche unendliche Produkt fast überall auf der Peripherie $|z| = 1$ (bei radialer Annäherung) Grenzwerte vom absoluten Betrage Eins hat[1]); der obige Beweis hierfür stellt sich in diesem Spezialfall wesentlich einfacher als in dem oben betrachteten allgemeinen Fall.

[1]) Vgl. die in der Einleitung zitierte Arbeit von Herrn SCHUR.

III. Grenzfälle.

§ 1. Fall, wo die gegebenen Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

43. Nach dem Satze von Carathéodory (S. 15) besitzt eine Funktion $w(z)$, welche für $|z| < 1$ dem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als Eins, die Eigenschaft, dass der Quotient

$$\frac{1 - |w|}{1 - |z|}$$

bei radialer Annäherung an einen beliebigen Randpunkt gegen einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert strebt, den wir als Abbildungsmodul in dem betreffenden Randpunkt bezeichnet haben. Als einen Grenzfall des im II. Abschnitt erledigten Interpolationsproblems kann man nun folgende Aufgabe betrachten.

Gegeben sind $3n$ Zahlen

(1) $z_\nu, w_\nu, l_\nu \quad (\nu = 1, \cdots, n; \; |z_\nu| = |w_\nu| = 1, \; z_\nu \neq z_\mu$ für $\nu \neq \mu)$.

Unter welchen Bedingungen existiert eine Funktion $w(z)$ der Klasse E [1]), die bei radialer Annäherung an den Randpunkt z_ν gegen den Randwert w_ν strebt, so dass der Abbildungsmodul höchstens gleich l_ν ist?

Es gilt ferner zu entscheiden, ob eine oder mehrere Lösungen vorhanden sind, und im Unbestimmtheitsfalle sämtliche Lösungen zu bestimmen.

44. Diese Aufgabe lässt sich durch eine Methode behandeln, die der im vorigen Abschnitt entwickelten analog ist. Der Unterschied besteht darin, dass jetzt das Juliasche Lemma das Lemma

[1]) Die Klasse E wird, wie vorher, gebildet von allen für $|z| < 1$ regulären Funktionen, deren absoluten Beträge nicht grösser als Eins sind.

von Schwarz ersetzen wird. Der erste Schritt des eingeschlagenen rekurrenten Verfahrens gestaltet sich jetzt folgendermassen.

Angenommen, $w(z)$ sei eine Lösung des vorgelegten Problems, so muss die Grösse l_1, welche nach Voraussetzung eine obere Schranke des Abbildungsmoduls im Randpunkte $z_1 = e^{i\alpha_1}$ angibt, nicht negativ sein:

$$l_1 \geqq 0.$$

Wenn $l_1 = 0$, so ist w nach dem Satz S. 15 konstant und gleich $w_1 = e^{i\beta_1}$; es ist demnach

$$w_\nu = w_1 \text{ und } l_\nu \geqq 0 \quad (\nu = 2, \cdots, n).$$

Ist wiederum der betrachtete Abbildungsmodul und also auch $l_1 > 0$, so kann man das Juliasche Lemma ansetzen. Nach S. 20 wird dann

$$\lambda_1 \frac{1 + w^{(1)} e^{-i\beta_1}}{1 - w^{(1)} e^{-i\beta_1}} = \frac{1 + z e^{-i\alpha_1}}{1 - z e^{-i\alpha_1}} + \mu_1 \frac{1 + w^{(2)} e^{-i\beta_1}}{1 - w^{(2)} e^{-i\beta_1}}, \tag{2}$$

wo $\lambda_1 = l_1$, $w^{(1)} \equiv w$ und μ_1 eine willkürliche *positive* Zahl ist, und wo $w^{(2)}(z)$ der Klasse E angehört [1]):

$$|w^{(2)}(z)| \leqq 1 \text{ für } |z| < 1.$$

Die Randwerte von $w^{(2)}$ in den Punkten $z_\nu = e^{i\alpha_\nu}$ $(\nu = 2, \cdots, n)$:

$$w_\nu^{(2)} = \lim_{r=1} w^{(2)}(re^{i\alpha_\nu}) \qquad (\nu = 2, \cdots, n)$$

sind bekannt und berechnen sich aus

$$\lambda_1 \frac{1 + w_\nu^{(1)} e^{-i\beta_1}}{1 - w_\nu^{(1)} e^{-i\beta_1}} = \frac{1 + e^{i(\alpha_\nu - \alpha_1)}}{1 - e^{i(\alpha_\nu - \alpha_1)}} + \mu_1 \frac{1 + w_\nu^{(2)} e^{-i\beta_1}}{1 - w_\nu^{(2)} e^{-i\beta_1}}, \tag{3}$$

wo $w_\nu^{(1)} = w_\nu$; es ist $|w_\nu^{(2)}| = 1$.

Um den Abbildungsmodul $m_2(\alpha)$ der Funktion $w^{(2)}$ in einem von z_1 *verschiedenen* Randpunkt $z = e^{i\alpha}$ zu berechnen, nehme man in (2) beiderseits den reellen Teil:

$$\lambda_1 \frac{1 - |w^{(1)}|^2}{|e^{i\beta_1} - w^{(1)}|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\alpha_1} - z|^2} + \mu_1 \frac{1 - |w^{(2)}|^2}{|1 - w^{(2)}|^2} \tag{4}$$

---

[1]) Die Formel (2) ist auch im Falle $w = e^{i\beta_1}$ anwendbar; man hat dann $w^{(2)} = e^{i\beta_1}$ zu setzen.

und bezeichne mit $m_1(\alpha)$ den Abbildungsmodul von $w^{(1)}$ in $z = e^{i\alpha}$. Ist nun $m_1(\alpha)$ endlich, so existiert nach dem CARATHÉODORYschen Satze der Grenzwert $e^{i\beta} = \lim\limits_{r=1} w^{(1)}(re^{i\alpha})$ und somit, nach (2), auch der Grenzwert $e^{i\gamma} = \lim\limits_{r=1} w^{(2)}(re^{i\alpha})$, und zwar ist $e^{i\gamma} =$ oder $\neq e^{i\beta_1}$, je nachdem $e^{i\beta} =$ oder $\neq e^{i\beta_1}$. In jenem Fall ergibt sich aus (4), dass $m_2(\alpha)$ endlich ist und

$$(5) \qquad \lambda_1 m_2(\alpha) = \mu_1 m_1(\alpha);$$

in diesem Fall findet man gemäss (4)

$$(6) \qquad \lambda_1 m_1(\alpha) = \left|\frac{e^{i\beta} - e^{i\beta_1}}{e^{i\alpha} - e^{i\alpha_1}}\right|^2 + \mu_1 m_2(\alpha) \left|\frac{e^{i\beta} - e^{i\beta_1}}{e^{i\gamma} - e^{i\beta_1}}\right|^2.$$

Zu denselben Formeln gelangt man, wenn umgekehrt $m_2(\alpha)$ als endlich vorausgesetzt wird, und man schliesst hieraus insbesondere, dass die Abbildungsmoduln $m_1(\alpha)$ und $m_2(\alpha)$ für $e^{i\alpha} \neq e^{i\alpha_1}$ gleichzeitig endlich oder unendlich sind.

Anders verhält es sich im Punkte $e^{i\alpha_1}$, wo voraussetzungsgemäss $m_1(\alpha_1) \leqq \lambda_1 \, (= l_1)$. Aus den Überlegungen S. 22 folgt, dass wenn $m_1(\alpha_1) < \lambda_1$, notwendig $\lim w^{(2)}(re^{i\alpha_1}) = e^{i\beta_1}$ und

$$(7) \qquad \frac{\lambda_1}{m_1(\alpha_1)} = 1 + \frac{\mu_1}{m_2(\alpha_1)},$$

somit $m_2(\alpha_1) < \infty$. Ist wiederum $m_1(\alpha_1) = \lambda_1$, so ist entweder $m_2(\alpha_1) = \infty$ oder $m_2(\alpha_1) < \infty$ und $e^{i\gamma_1} = \lim\limits_{r=1} w^{(2)}(re^{i\alpha_1}) \neq e^{i\beta_1}$.

Und umgekehrt: wenn $m_2(\alpha_1) < \infty$ und $e^{i\gamma} = e^{i\beta_1}$, so gilt die Beziehung (7) und es ist also $m_1(\alpha_1) < \lambda_1$; sonst ist immer $m_1(\alpha_1) = \lambda_1$.

Zusammenfassend gilt also folgendes:

Notwendig und hinreichend, damit eine Funktion w der verlangten Art existiert, ist, dass entweder

$$\lambda_1 = l_1 = 0, \; l_\nu \geqq 0, \; w_\nu = w_1 \quad (\nu = 2, \cdots, n),$$

oder dass $\lambda_1 > 0$ und eine Funktion $w^{(2)}$ der Klasse E existiert, welche folgenden Bedingungen genügt:

1:o. Es ist

$$\lim_{r=1} w^{(2)}(re^{i\alpha_\nu}) = w_\nu^{(2)} \quad (\nu = 2, \cdots, n)$$

wo $w_\nu^{(2)}$ aus der Formel (3) zu berechnen ist.

2:o. Der Abbildungsmodul von $w^{(2)}$ im Randpunkte $z_\nu = e^{i a_\nu}$ $(\nu = 2, \cdots, n)$ ist höchstens gleich der Zahl $l_\nu^{(2)}$, welche durch die Formel

$$\lambda_1 l_\nu^{(1)} = \left| \frac{w_\nu^{(1)} - w_1^{(1)}}{e^{i a_\nu} - e^{i a_1}} \right|^2 + \mu_1 l_\nu^{(2)} \left| \frac{w_\nu^{(1)} - w_1^{(1)}}{w_\nu^{(2)} - w_1^{(1)}} \right|^2 \qquad (\nu = 2, \cdots, n; \; l_\nu^{(1)} \equiv l_\nu)$$

bestimmt ist, wo

$$\left| \frac{w_\nu^{(1)} - w_1^{(1)}}{w_\nu^{(2)} - w_1^{(1)}} \right| = \frac{l_\nu^{(1)}}{l_\nu^{(2)}}$$

zu setzen ist, falls $w_\nu^{(1)} = w_1^{(1)}$ und also $w_\nu^{(2)} = w_1^{(1)} \equiv e^{i\beta_1}$.

Der Abbildungsmodul von $w \equiv w^{(1)}$ in einem der Punkte $z = z_\nu$ $(\nu \geqq 2)$ ist dann und nur dann gleich der oberen Schranke $l_\nu^{(1)}$, wenn der entsprechende Abbildungsmodul von $w^{(2)}$ gleich $l_\nu^{(2)}$ ist. Im Punkte $z = z_1$ erreicht der Abbildungsmodul $m_1(a_1)$ von w den gegebenen Wert $\lambda_1 = l_1^{(1)}$, ausser in dem einzigen Fall, wo die Funktion $w^{(2)}$ in demselben Punkte den Randwert $e^{i\beta_1}$ mit einem *endlichen* Wert $m_2(a_1)$ des Abbildungsmoduls annimmt, in welchem Fall die Beziehung (7) und also $m_1(a_1) < \lambda_1$ gilt.

45. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zu folgender Lösung des vorgelegten Problems:

Von den gegebenen Werten $z_\nu = e^{i a_\nu}$, w_ν, l_ν ausgehend berechne man mittels der Rekursionsformeln

$$(8) \qquad \lambda_k \frac{1 + w_\nu^{(k)} e^{-i\beta_k}}{1 - w_\nu^{(k)} e^{-i\beta_k}} = \frac{1 + e^{i(a_\nu - a_k)}}{1 - e^{i(a_\nu - a_k)}} + \mu_k \frac{1 + w_\nu^{(k+1)} e^{-i\beta_k}}{1 - w_\nu^{(k+1)} e^{-i\beta_k}},$$

wo $w_k^{(k)} = e^{i\beta_k}$, $\lambda_k = l_k^{(k-1)}$), und

$$(9) \qquad \lambda_k l_\nu^{(k)} = \left| \frac{w_\nu^{(k)} - w_k^{(k)}}{e^{i a_\nu} - e^{i a_k}} \right|^2 + \mu_k l_\nu^{(k+1)} \left| \frac{w_\nu^{(k)} - w_k^{(k)}}{w_\nu^{(k+1)} - e^{i\beta_k}} \right|^2,$$

wo für $w_\nu^{(k)} = w_k^{(k)}$, $w_\nu^{(k+1)} = e^{i\beta_k} \equiv w_k^{(k)}$

$$\left| \frac{w_\nu^{(k)} - w_k^{(k)}}{w_\nu^{(k+1)} - e^{i\beta_k}} \right| = \frac{l_\nu^{(k)}}{l_\nu^{(k+1)}}$$

zu setzen ist, die Werte $\lambda_k \equiv l_k^{(k)}$, $l_\nu^{(k)}$ und $w_\nu^{(k)}$ $(\nu = k, \cdots, n)$.

---

[1]) Die μ_k sind willkürliche positive Parameter.

Das Problem hat dann und nur dann eine Lösung, wenn für ein gewisses $k \leqq n$

$$(10)\quad \lambda_\nu > 0\ (\nu < k),\ \lambda_k = 0,\ l_\nu^{(k)} = 0 \text{ und } w_\nu^{(k)} = w_k^{(k)}\ (\nu = k+1, \cdots, n)$$

oder

$$(11)\quad \lambda_\nu > 0\ (\nu = 1, \cdots, n).$$

Im Falle (10) ist die (einzige) Lösung des Problems eine rationale Funktion $(k-1)$:er Ordnung, welche den Einheitskreis $|z| = 1$ invariant lässt.

Im Falle (11) hat das Problem eine unendliche Anzahl von Lösungen $w \equiv w^{(1)}$, deren Gesamtheit mittels der Rekursionsformel

$$(12)\quad \lambda_k \frac{1 + w^{(k)} e^{-i\beta_k}}{1 - w^{(k)} e^{-i\beta_k}} = \frac{1 + ze^{-i\alpha_k}}{1 - ze^{-i\alpha_k}} + \mu_k \frac{1 + w^{(k+1)} e^{-i\beta_k}}{1 - w^{(k+1)} e^{-i\beta_k}} \quad (k = n, \cdots, 1)$$

wo für $w^{(n+1)}$ eine *beliebige* Funktion der Klasse E einzusetzen ist.

Die rationale Funktion w, welche im Ausnahmefalle (10) eindeutig bestimmt wird, nimmt die gegebenen Randwerte w_ν mit den *maximalen* Werten l_ν des Abbildungsmoduls dann und nur dann an, wenn $l_\nu^{(k)} = 0\ (\nu = k+1, \cdots, n)$.

Im allgemeinen Fall (11) existieren dagegen immer unendlich viele Lösungen w, für welche der Abbildungsmodul in den Punkten z_ν die vorgegebenen Werte l_ν wirklich erreicht. Nach den obigen Überlegungen genügt es, um eine derartige Funktion w zu erhalten, für $w^{(n+1)}$ eine Funktion der Klasse E zu substituieren, welche in den gegebenen Randpunkten z_ν entweder einen *unendlichen* Abbildungsmodul hat oder, falls der Abbildungsmodul endlich ist, einen Randwert hat, der *verschieden* ist von demjenigen Wert $w^{(n+1)}$, der aus den gegebenen Werten z_ν, w_ν, l_ν mittels der Rekursionsformel (8) berechnet werden kann. Nimmt dagegen $w^{(n+1)}$ diesen Wert (bei radialer Annäherung an den Punkt z_ν) mit einem *endlichen* Wert des Abbildungsmoduls an, so ist der Abbildungsmodul der entsprechenden Lösung w immer *kleiner* als der gegebene Wert l_ν.

46. Beachtet man, dass das Juliasche Lemma, das die Grundlage der vorhergehenden Betrachtungen bildet, ein Grenzfall des Schwarzschen Lemmas ist, so erwartet man, dass die obigen Ergebnisse durch einen Grenzübergang direkt aus den Resultaten des ersten Paragraphen vom Abschnitt II abgeleitet werden können. Dies ist tatsächlich der Fall; wir werden insbesondere zeigen, wie der allgemeine Ausdruck der Lösung des zuletzt behandelten Problems aus dem S. 32 gegebenen Ausdruck einer Funktion der Klasse E_n gewonnen werden kann.

Zu diesem Zweck schreiben wir die Rekursionsformel (7)′ S. 31 (wir setzen hierbei nach der S. 39 gemachten Verabredung $c_\nu = a_\nu b_\nu$)

$$z w^{(\nu)} = \varrho_\nu - \frac{\sigma_\nu}{\tau_\nu + z w^{(\nu+1)}}, \tag{13}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_\nu &= \frac{e^{i\beta_\nu}}{b_\nu}\left[(1 + a_\nu^2 \lambda_\nu) z - a_\nu \lambda_\nu e^{i\alpha_\nu}\right], \\ \sigma_\nu &= \frac{\lambda_\nu (1 + a_\nu^2 \lambda_\nu)}{b_\nu^2 e^{-2i\beta_\nu}} (a_\nu e^{i\alpha_\nu} - z)(e^{i\alpha_\nu} - a_\nu z), \\ \tau_\nu &= \frac{e^{i\beta_\nu}}{b_\nu}\left[a_\nu \lambda_\nu z - (1 + a_\nu^2 \lambda_\nu) e^{i\alpha_\nu}\right] \end{aligned}\right. \tag{14}$$

und

$$\lambda_\nu = \frac{1 - b_\nu^2}{1 - a_\nu^2}. \tag{15}$$

Der allgemeine Ausdruck einer Funktion w der Klasse E_n ergibt sich hiernach in der Form eines endlichen Kettenbruches

$$z w = \varrho_1 - \cfrac{\sigma_1}{\tau_1 + \varrho_2 - \cdots - \cfrac{\sigma_n}{\tau_n + z w^{(n+1)}}}. \tag{16}$$

Setzt man nun in den Ausdrücken (14) $a_\nu = b_\nu = 1$, so geht die Formel (13) in die Rekursionsformel (12) über, wenn man dem Parameter μ_ν den Wert

$$\mu_\nu = 1 + \lambda_\nu$$

erteilt. *Die Formel* (16) *gibt also auch den allgemeinen Ausdruck der Lösung des in diesem Abschnitt betrachteten Randwertproblems.*

47. Nunmehr lassen sich die obigen Ergebnisse ohne Schwierigkeit auf den Fall ausdehnen, wo die Anzahl der vorgegebenen Werte

$$z_\nu, w_\nu, l_\nu \quad (z_\nu = 1, 2, \cdots, |z_\nu| = w_\nu| = 1; \quad z_\mu \neq z_\nu \text{ für } \mu \neq \nu)$$

unendlich ist.

Als notwendig und hinreichend für die Existenz einer Funktion der Klasse E, welche in den gegebenen Randpunkten z_ν (bei radialer Annäherung) die Werte w_ν hat, so dass der entsprechende Abbildungsmodul höchstens gleich l_ν ist, ergibt sich das Bestehen der Bedingungen (10) oder (11) (wo $n = \infty$ zu setzen ist). Die Notwendigkeit ist evident. Dass die Bedingungen auch hinreichend sind, ist im Falle (10) auch einleuchtend; im allgemeinen Fall (11) sieht man es durch folgende Überlegung ein.

Man setze für $w^{(n+1)}(z)$ in der Formel (16) eine beliebige Funktion der Klasse E ein, z. B. $w^{(n+1)} = 0$; die entsprechende Funktion $w(z)$ bezeichnen wir durch $w_1^{(n+1)}(z)$. Aus der Folge der Funktionen $w_1^{(n+1)}(n = 1, 2, \cdots)$ lässt sich gemäss dem Vitalischen Satz eine konvergente Teilfolge $w_1^{(n_k+1)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ herauswählen. Die Grenzfunktion $w_1^{(\infty)}(z)$ stellt eine Lösung des Problems dar.

In der Tat gehört $w_1^{(\infty)}$ zunächst der Klasse E an. Um zu beweisen, dass sie in dem Randpunkt z_1 die geforderten Eigenschaften hat, bemerke man, dass wenn man in der Formel (2) (S. 54) $w = w_1^{(\infty)}$ setzt, die entsprechende Funktion $w^{(2)} = w_2^{(\infty)}$ der Klasse E angehört. Es ist nämlich

$$w_2^{(\infty)} = \lim w_2^{(n_k+1)},$$

wo $w_2^{n_k+1}$ diejenige Funktion bezeichnet, welche an die Stelle von $w^{(2)}$ in (2) gesetzt der Funktion $w^{(1)} = w_1^{(n_k+1)}$ entspricht. Diese letzte Funktion genügt aber nach N:o 44 den gegebenen Bedingungen im Punkte z_1, und die Funktion $w_2^{(n_k+1)}$ gehört daher der Klasse E an; dieselbe Eigenschaft muss demnach auch der Grenz-

funktion $w_2^{(\infty)}$ zukommen. Sobald aber $w_2^{(\infty)}$ diese Bedingung erfüllt, hat die Funktion $w_1^{(\infty)}$, welche ja mit $w_2^{(\infty)}$ durch die Beziehung

$$\lambda_1 \frac{1 + w_1^{(\infty)} e^{-i\beta_1}}{1 - w_1^{(\infty)} e^{-i\beta_1}} = \frac{1 + ze^{-i\alpha_1}}{1 - ze^{-i\alpha_1}} + \mu_1 \frac{1 + w_2^{(\infty)} e^{-i\beta_1}}{1 - w_2^{(\infty)} e^{-i\beta_1}}$$

gebunden ist, für $z \to e^{i\alpha_1}$ (radial) den Grenzwert $e^{i\beta_1}$, und zwar ist der Abbildungsmodul hierbei $\leqq \lambda_1 = l_1$, w. z. b. w.

Um schliesslich zu zeigen, dass $w_1^{(\infty)}$ in einem beliebigen der Randpunkte z_ν die geforderten Eigenschaften hat, nehme man an, dass dies für $z_1, \cdots z_n$ nachgewiesen ist; dasselbe gilt dann auch im Punkte z_{n+1}, sobald die mittels der Formel (16) aus der Funktion $w = w_1^{(\infty)}$ abgeleitete Funktion $w^{(n+1)}$ für $z \to z_{n+1}$ (radial) dem Grenzwert $w_{n+1}^{(n+1)} = e^{i\beta_{n+1}}$ zustrebt derart, dass der entsprechende Abbildungsmodul $l_{n+1}^{(n+1)} = \lambda_{n+1}$ ist. Dass $w^{(n+1)}$ im Randpunkte z_{n+1} tatsächlich diese Eigenschaften hat, wird aber ähnlich bewiesen, wie die entsprechende Eigenschaft der Funktion $w_1^{(\infty)}$ im Punkte $z = z_1$. Man schliesst also, dass diese letztere Funktion allen geforderten Bedingungen genügt.

48. Die Formel (16), welche nach Obigem den allgemeinen Ausdruck einer Funktion der Klasse E_n gibt, sowohl im Falle $|z_\nu| = a_\nu < 1$ wie in dem vorliegenden Grenzfall $|z_\nu| = a_\nu = 1$, kann nach S. 45 auch in der Form

$$w = \frac{P_n - Q_n w^{(n+1)}}{R_n - S_n w^{(n+1)}} \tag{17}$$

geschrieben werden, wo die Polynome P_n, Q_n, R_n, S_n durch die Formeln (29) und (31) S. 43 sowie die Rekursionsformel (11) S. 32 berechnet werden. Bezeichnet man, wie oben, mit λ_ν die durch (15) definierte Zahl, so lassen sich die Rekursionsformeln für die betrachteten Polynome auch schreiben

$$(18)\quad \begin{cases} d_\nu (1 - a_\nu z\varepsilon_\nu) P = (d_\nu^2 - a_\nu z\varepsilon_\nu) P_{\nu-1} - \dfrac{b_\nu \eta_\nu}{\lambda_\nu} Q_{\nu-1}, \\ d_\nu (1 - a_\nu z\varepsilon_\nu) Q_\nu = \dfrac{b_\nu z\varepsilon_\nu \eta_\nu}{\lambda_\nu} P_{\nu-1} + (a_\nu - d_\nu^2 z\varepsilon_\nu) Q_{\nu-1}, \end{cases}$$

wo $d_\nu = \left(1 + \dfrac{b_\nu^2}{\lambda_\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Die Formeln für R_ν und S_ν erhält man, wenn man die Grössen P und Q durch die entsprechenden R und S ersetzt ($P_0 = S_0 = 0$, $Q_0 = -1$, $R_0 = 1$).

Der Ausdruck einer Funktion w der Klasse E, welche in den n ersten der gegebenen Randpunkte z_ν den S. 53 aufgestellten Bedingungen genügt, ergibt sich nun aus (17) einfach so, dass man in (18) $a_\nu = b_\nu = 1$ setzt und λ_ν die durch das Rekursionsverfahren von N:o 45 bestimmte obere Grenze des Abbildungsmoduls der Funktion $w^{(\nu)}$ im Randpunkte z_ν bedeuten lässt.

Als Variabilitätsgebiet des Wertes w, welchen eine Funktion der betrachteten Art in einem beliebigen inneren Punkt z des Einheitskreises annehmen kann, erhält man wieder eine wohlbestimmte Kreisscheibe $C_n(z)$. Die Kreise $C_1(z)$, $C_2(z)$, $\cdots$ sind in einander geschachtelt und zwar so, dass C_n und C_{n+1} einander *berühren* ($n = 1, 2, \cdots$).

49. Nachdem die Lösung des in diesem Paragraphen betrachteten Problems durch einen einfachen Grenzübergang aus den Resultaten des zweiten Abschnitts abgeleitet worden ist in dem Fall, wo die Anzahl n der gegebenen Werte endlich ist, lässt sich auch die allgemeine Lösung für $n = \infty$ aus den entsprechenden früheren Ergebnissen unmittelbar ablesen.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die *Bestimmtheit* des vorgelegten Problems ergibt sich nach wie vor, dass der Radius des Kreises $C_n(z)$ für jedes $|z| < 1$ mit wachsenden n gegen Null strebt. Dies trifft, falls $|z_\nu| < 1$ ($\nu = 1, 2, \cdots$), nach S. 42 dann und nur dann zu, wenn die Reihe

$$\sum \frac{1 - a_\nu}{1 - b_\nu}$$

divergent ist. Falls nun $a_\nu = b_\nu = 1$, so hat man einfach den Quotienten

$$\frac{1 - a_\nu}{1 - b_\nu} = \frac{1 + b_\nu}{1 + a_\nu} \cdot \frac{1 - a_\nu^2}{1 - b_\nu^2}$$

durch $\frac{1}{\lambda_\nu}$ zu ersetzen (vgl. S. 58), und man schliesst also, dass das Problem dann und nur dann bestimmt ist, wenn die Reihe

$$\sum \frac{1}{\lambda_\nu}$$

divergiert.

Ist wiederum diese Reihe konvergent, so schliesst man, wie vorher (S. 45), dass die rationalen Funktionen P_n, Q_n, S_n, R_n für $|z| < 1$ gegen wohlbestimmte, innerhalb des Einheitskreises reguläre Funktionen P, Q, R, S streben. Die allgemeine Lösung des Problems wird dann durch

$$w = \frac{P - Q\, w_\infty}{R - S\, w_\infty}$$

gegeben, wo w_∞ eine *beliebige* Funktion der Klasse E bezeichnet.

50. Die Hauptergebnisse des II. und III. Abschnitts können in folgender Weise zusammengefasst werden.

Von den gegebenen Werten

(19) $$z_\nu = a_\nu e^{i\alpha_\nu},\ w_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

bzw.

(19)′ $$z_\nu = e^{i\alpha_\nu},\ w_\nu\ (|w_\nu| = 1),\ l_\nu\ (\nu = 1, 2, \cdots)$$

ausgehend, bildet man mittels der Rekursionsformeln (18) die für $|z| < 1$ regulären rationalen Funktionen $P_\nu, Q_\nu, R_\nu, S_\nu$ sowie die Werte

$$w_\mu^{(\nu+1)} = b_{\nu+1}\, e^{i\beta_{\nu+1}} = \frac{P_\nu(z_\mu) - R_\nu(z_\mu)\, w_\mu}{Q_\nu(z_\mu) - S_\nu(z_\mu)\, w_\mu} \quad (\mu \geq \nu + 1),$$

und im Falle (19)′, wo $b_\nu = 1$, mittels der Formeln (9) S. 56 die Ausdrücke $l_\mu^{(\nu)}$; hierbei setzt man

$$\lambda_\nu = \frac{1 - b_\nu^2}{1 - a_\nu^2}$$

und im Falle (19)′

$$\lambda_\nu = l_\nu^{(\nu)}.$$

Dann gelten folgende Sätze:

I. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Funktion w der Klasse E, welche in den gegebenen Punkten z_ν die geforderten Eigenschaften hat (S. 37 und 59), ist, dass entweder für ein gewisses n

$$(20) \qquad \begin{cases} \lambda_\nu > 0 \ (\nu < n), \lambda_n = 0, \\ w_\mu^{(n)} = e^{i\beta_n} \ (\mu = n, n+1, \cdots), \\ l_\mu^{(n)} \geqq 0 \ (\mu = n+1, \cdots)^{1)}, \end{cases}$$

oder

$$(21) \qquad \lambda_n > 0 \ (n = 1, 2, \cdots).$$

II. Das Problem ist bestimmt oder unbestimmt, je nachdem die Summe

$$(22) \qquad \sum \frac{1}{\lambda_\nu}$$

unendlich oder endlich ist.

III. Im *Bestimmtheitsfalle* $\left(\sum \frac{1}{\lambda_\nu} = \infty\right)$ wird die einzige Lösung definiert durch

$$w = \frac{P_{n-1} - Q_{n-1}\, e^{i\beta_n}}{R_{n-1} - S_{n-1}\, e^{i\beta_n}},$$

falls die Bedingungen (20) erfüllt sind; diese Funktion ist rational, von $(n-1)$:er Ordnung und dem absoluten Betrage nach gleich Eins für $|z| = 1$. Im allgemeinen Falle (21) ergibt sich wiederum die Lösung w als der Grenzwert

$$w = \lim_{n=\infty} \frac{P_n - Q_n\, w^{(n+1)}}{R_n - S_n\, w^{(n+1)}},$$

der bei beliebiger Wahl der Funktionenfolge $w^{(n)}$ ($|w^{(n)}| \leqq 1$ für $|z| < 1$) für $|z| < 1$ existiert und einen von der Wahl dieser Funktionenfolge unabhängigen Wert hat[2]).

[1]) Diese letzten Bedingungen kommen nur im Falle (19)′ vor.

[2]) Die Funktion w kann auch als der für für $n \to \infty$ konvergente Kettenbruch (16) S. 58 dargestellt werden.

Im *Unbestimmtheitsfalle* $\left(\sum \frac{1}{\lambda_\nu} < \infty\right)$ existieren die Grenzwerte

$$P = \lim_{n=\infty} P_n, \quad Q = \lim_{n=\infty} Q_n, \quad R = \lim_{n=\infty} R_n, \quad S = \lim_{n=\infty} S_n$$

für $|z| < 1$ und stellen Funktionen dar, welche im Einheitskreise regulär sind. Die allgemeine Lösung w des Problems ist

$$w = \frac{P - Q\,w_\infty}{R - S\,w_\infty}, \tag{23}$$

wo w_∞ eine beliebige Funktion der Klasse E ist (d. h. $|w_\infty| \leq 1$ für $|z| < 1$).

Die zulässigen Werte der Lösungen w, welche einem gegebenen inneren Punkt z des Einheitskreises entsprechen, füllen eine wohlbestimmte, innerhalb des Einheitskreises belegene Kreisscheibe $C_\infty(z)$ aus. Der Wert $w(z)$ fällt im allgemeinen innerhalb des Kreises $C_\infty(z)$; er liegt auf der Peripherie dann und nur dann, wenn

$$w = \frac{P - Q\,e^{i\vartheta}}{R - S\,e^{i\vartheta}}, \tag{23'}$$

wo ϑ eine reelle Konstante ist. Diese Lösungen haben die interessante Eigenschaft, dass sie bei radialer Annäherung an den Kreis $|z| = 1$ fast überall Randwerte vom absoluten Betrage Eins besitzen.

51. Ein näheres Studium derjenigen im Einheitskreise beschränkten Funktionen, welche durch die zuletzt genannte Randwerteigenschaft gekennzeichnet sind, erscheint aus mehreren Gründen wünschenswert. Es würde indes bei dieser Gelegenheit zu weit führen, auf diese Frage näher einzugehen. Indem wir auf die S. 28 angegebenen Sätze hinweisen, begnügen wir uns an dieser Stelle damit, an einen bekannten Satz von F. und M. RIESZ eine kleine Ergänzung zu bringen [1]).

[1]) F. und M. RIESZ: *Über die Randwerte analytischer Funktionen* (4. skand. Mathematikerkongress in Stockholm, 1916).

Nach dem Fatouschen Satze strebt eine Funktion $w(re^{i\varphi})$ der Klasse E für $r \to 1$ gegen bestimmte Grenzwerte $w(e^{i\varphi})$, ausser möglicherweise für eine Nullmenge φ. Der Satz von Riesz besagt, dass wenn $w(e^{i\varphi})$ einen konstanten Wert a ($|a| \leqq 1$) hat für eine Wertmenge φ von positivem Mass, die Funktion $w(re^{i\varphi})$ überhaupt konstant und gleich a ist. Im Falle $|a| = 1$ lässt sich etwas mehr beweisen:

Die Menge der Werte $e^{i\varphi}$, wo eine nicht konstante Funktion w der Klasse E einen gegebenen Randwert a mit einem endlichen Wert des entsprechenden Abbildungsmoduls annimmt, ist abzählbar.

Dies folgt unmittelbar aus folgendem, schärferem Satz:

Es sei $|w(z)| < 1$ für $|z| < 1$ und

$$\lim_{r=1} \frac{1 - w(re^{i\varphi_n})}{1 - r} = l_n, \lim_{r=1} w(re^{i\varphi_n}) = a \quad (n = 1, 2, \cdots; e^{i\varphi_\mu} \neq e^{i\varphi_\nu}).$$

Dann ist die Summe

$$\sum \frac{1}{l_n}$$

endlich.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Formel (2) S. 54, wenn man $\alpha_1 = \varphi_1$ und $a = e^{i\beta_1}$ setzt und dem Parameter μ_1 den Wert $\lambda_1 = l_1$ gibt. Es wird dann für $z = 0$

$$\frac{1 + \bar{a}\, w(0)}{1 - \bar{a}\, w(0)} = \frac{1}{l_1} + \frac{1 + \bar{a}\, w^{(2)}(0)}{1 - \bar{a}\, w^{(2)}(0)}.$$

Aus der Formel (5) S. 55 ist aber zu ersehen, dass die Funktion $w^{(2)}(z)$ in dem Punkt $z_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ ($\nu = 2, \cdots$) den Randwert a hat mit dem Abbildungsmodul l_ν, und man findet durch Iteration des obigen Schlusses, dass für jedes n

$$\frac{1 + \bar{a}\, w(0)}{1 - \bar{a}\, w(0)} = \sum_1^n \frac{1}{l_\nu} + \frac{1 + \bar{a}\, w^{(n+1)}(0)}{1 - \bar{a}\, w^{(n+1)}(0)}.$$

Da das letzte Glied einen positiven Realteil hat, folgt, dass

$$\Re\left(\frac{1+\bar{a}\,w(0)}{1-\bar{a}\,w(0)}\right) \geq \sum_{1}^{n}\frac{1}{l_\nu},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

§ 2. Fall, wo die gegebenen Punkte z_ν zusammenfallen. Zusammenhang mit dem STIELTJESschen Momentenproblem.

52. Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die gegebenen Punkte $z_1, z_2, \cdots$ unter einander verschieden sind. Die vorhergehenden Entwicklungen enthalten aber auch die Lösung gewisser Probleme, zu denen man geführt wird, wenn man einige oder sämtliche dieser Punkte zusammenfallen lässt. Als besonders interessant sind folgende Grenzfälle hervorzuheben.

1:o Es ist $z_\nu = z_0$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ und $|z_0| < 1$. In diesem Fall geben die obigen Resultate, in naheliegender Weise modifiziert, die SCHURsche Lösung des s. g. CARATHÉODORYschen Problems: die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welchen die Ableitungen einer beschränkten Funktion in einem gegebenen inneren Punkt (z_0) des Einheitskreises genügen.

2:o Es ist $z_\nu = z_0$ und $|z_0| = 1$. In diesem Falle enthalten die obigen Ergebnisse Kriterien über die Koeffizienten einer nach Potenzen von $z - z_0$ fortschreitenden Reihe, welche eine beschränkte Funktion im gegebenen Randpunkt im Sinne POINCARÉS asymptotisch darstellt, sowie den allgemeinen Ausdruck einer derartigen Funktion. Hierbei werden die gegebenen Koeffizienten der asymptotischen Reihenentwicklung a priori einer gewissen Einschränkung unterworfen; die Notwendigkeit und die Art dieser einschränkenden Voraussetzung gehen am einfachsten hervor, wenn man vom Einheitskreise zu einer Halbebene übergeht in

der Weise, dass der kritische Randpunkt in den unendlich fernen Punkt fällt[1]).

Wir wollen daher zunächst die Ergebnisse des ersten Paragraphen dieses Abschnitts auf den Fall übertragen, wo die zu untersuchende Funktion $w(z)$ folgende Eigenschaft hat:

$w(z)=u+iv$ ist in jedem endlichen Punkt der oberen Halbebene $y>0$ $(z=x+iy)$ regulär und ihr imaginärer Teil nicht positiv:

$$v(x,y)\leqq 0. \tag{24}$$

Zur Abkürzung sagen wir, dass eine derartige Funktion der Klasse I angehört. Beachtet man, dass der Übergang von der Klasse E zur Klasse I durch die linearen Transformationen

$$\frac{1}{i}\,\frac{1+w}{1-w} \text{ und } i\,\frac{1+z}{1-z} \tag{25}$$

bewerkstelligt wird, so schliesst man, dass für eine Funktion $w=u+iv$ der Klasse I der Randabbildungsmodul in einem Punkt $z=x$:

$$\lim_{y=0}\frac{|v(x,y)|}{y},\quad \lim_{y=0}\frac{1}{y\,|v(x,y)|}$$

existiert; der letzte Grenzwert kann nur dann einen endlichen Wert haben, wenn $w\to\infty$ für $z\to x$. Der Abbildungsmodul ist dann und nur dann Null, wenn die Funktion w reell und konstant ist (wobei auch die unendliche Konstante zu berücksichtigen ist).

Entsprechendes gilt im Randpunkte $z=\infty$, wo der Abbildungsmodul durch

$$\lim_{y=\infty} y\,|v(x,y)| \text{ bzw. } \lim_{y=\infty}\frac{y}{|v(x,y)|}$$

definiert ist.

---

[1]) Dieses Problem und das damit äquivalente STIELTJESsche Momentenproblem haben wir in der dritten in der Fussnote [2]) S. 4 zitierten Arbeiten gelöst; für eine vollständige Darstellung verweisen wir auf jene Untersuchung. Zweck der folgenden Betrachtungen ist nur zu zeigen, dass dieses Problem in dem allgemeinen Interpolationsproblem als Spezialfall enthalten ist.

53. Stellt man sich nun die Aufgabe, die Gesamtheit derjenigen Funktionen $w(z)$ der Klasse I zu bestimmen, die in gegebenen Punkten

$$x_1, x_2, \cdots \quad (x_\mu \neq x_\nu \text{ für } \mu \neq \nu)$$

der reellen Achse vorgegebene reelle Randwerte

$$u_1, u_2, \cdots$$

hat in der Weise, dass die entsprechenden Abbildungsmoduln höchstens gleich den vorgeschriebenen Werten

$$l_1, l_2, \cdots$$

sind[1]), so geht man zunächst mittels der zu (25) inversen Transformationen zur Klasse E über. Die gegebenen Randpunkte transformieren sich in

$$(26) \qquad z_\nu = \frac{x_\nu - i}{x_\nu + i} \text{ bzw. } w_\nu = \frac{iu_\nu - 1}{iu_\nu + 1},$$

während die vorgeschriebenen Schranken l_ν des Abbildungsmoduls, wegen der Invarianz der letzten Grösse gegenüber konformer Abbildung, unverändert bleiben. Das Problem ist in dieser Weise auf die im vorhergehenden Paragraphen behandelte Aufgabe zurückgeführt. Setzt man nun das auf den S. 54 entwickelte rekurrente Verfahren an und transformiert man schliesslich sämtliche mittels der Formeln (8) und (9) (S. 56) abgeleiteten Werte durch die Transformationen (25), so ergibt sich folgendes:

Der Algorithmus (12) S. 57 geht über in

$$(27) \quad \lambda_\nu \frac{1 + u_\nu^{(\nu)} w^{(\nu)}}{w^{(\nu)} - u_\nu^{(\nu)}} = \frac{1 + x_\nu z}{x_\nu - z} + \mu_\nu \frac{1 + u_\nu^{(\nu)} w^{(\nu+1)}}{w^{(\nu+1)} - u_\nu^{(\nu)}} \, (\nu = 1, 2, \cdots),$$

wo $w^{(\nu)}$ eine Funktion der Klasse I ist, welche in den gegebenen Punkten x_k $(k > \nu)$ die reellen Grenzwerte $u_k^{(\nu)}$ hat, während der

1) Hierbei können ein gewisser der Werte x_ν und ein oder mehrere der Werte u_ν unendlich sein. — Die Annäherung an die gegebenen Randpunkte soll orthogonal zur reellen Achse geschehen.

entsprechende Abbildungsmodul höchstens gleich $l_k^{(\nu)}$ ist $(l_\nu^{(\nu)} = \lambda_\nu)$. Hierbei berechnen sich die Werte $l_k^{(\nu)}$ und $u_k^{(\nu)}$ aus den Formeln (26), (8), (9) (S. 56) und

$$(27)' \qquad u_k^{(\nu)} = \frac{1}{i} \frac{1 + w_k^{(\nu)}}{1 - w_k^{(\nu)}} \qquad (u_k^{(1)} \equiv u_k, w_k^{(1)} \equiv w_k).$$

Als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Funktion w der Klasse I, welche den S. 68 aufgezählten Randbedingungen genügt, ergibt sich das Bestehen der Beziehungen (20) oder (21) (S. 63).

Im Falle (20) ist die einzige Lösung des Problems eine rationale Funktion $(n-1)$: er Ordnung, welche auf der reellen Achse reelle Werte annimmt. Im allgemeinen Fall (21) ist das Problem bestimmt oder unbestimmt, je nachdem die Summe

$$(28) \qquad \sum \frac{1}{\lambda_\nu}$$

unendlich oder endlich ist.

Unter den Bedingungen (21) ist die Gesamtheit der Funktionen w der Klasse I, welche in den n ersten der gegebenen Punkte x_ν den vorgeschriebenen Bedingungen genügt, gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$(29) \qquad w = \frac{A_n + B_n w^{(n+1)}}{C_n + D_n w^{(n+1)}},$$

welche aus der Formel (17) S. 60 hervorgeht, wenn die Variabel z und die Funktion w durch (25) S. 67 transformiert werden; $w^{(n+1)}$ bezeichnet eine beliebige Funktion der Klasse I. Eine leichte Rechnung zeigt, dass die rationalen, für $y > 0$ regulären Funktionen A_n, B_n, C_n, D_n durch die Formeln

$$(30) \qquad \begin{cases} A + B = -2(Q + S), \; A - B = 2i(P + R), \\ C + D = 2i(Q - S), \; C - D = 2(P - R) \end{cases}$$

bestimmt sind, wobei die Polynome P_n, Q_n, R_n, S_n aus den Rekursionsformeln (18) S. 60 zu berechnen sind (hier hat man im vor-

liegenden Fall $a_\nu = b_\nu = 1$ zu setzen; ferner soll für z gemäss (25) die Transformation $\frac{z-i}{z+i}$ substituert werden).

Falls die Reihe (28) konvergent ist, so streben die rationalen Funktionen (30) gegen wohlbestimmte Grenzfunktionen A, B, C und D, welche in der oberen Halbebene regulär sind; die allgemeine Lösung des Problems ist

$$w = \frac{A + B\,w_\infty}{C + D\,w_\infty}, \tag{31}$$

wo w_∞ eine beliebige Funktion der Klasse I ist.

Wir bemerken schliesslich, dass der Ausdruck (29) sich auch in der Form eines endlichen Kettenbruches schreiben lässt. Die Rekursionsformel (27) kann nämlich auf die Form

$$w^{(\nu)} = u_\nu^{(\nu)} + \cfrac{\lambda_\nu\left[1 + (u_\nu^{(\nu)})^2\right]}{\frac{1 + x_\nu z}{x_\nu - z} - u_\nu^{(\nu)} - (1 + \lambda_\nu)\,\cfrac{1 + (u_\nu^{(\nu)})^2}{u_\nu^{(\nu)} - w^{(\nu+1)}}}, \tag{32}$$

gebracht werden, woraus die erwünschte Kettenbruchdarstellung unmittelbar folgt.

54. Nachdem wir die Resultate des ersten Paragraphen auf die Funktionsklasse I übertragen haben, wollen wir jetzt den in Aussicht gestellten Grenzübergang vornehmen. Wir lassen also alle gegebenen Punkte x_ν in einen einzigen Punkt x_0 zusammenfallen; es empfiehlt sich $x_0 = \infty$ zu setzen. Man sieht nun leicht ein, dass sämtliche durch die oben gegebenen Rekursionsformeln definierten Ausdrücke hierbei gegen bestimmte Grenzwerte streben; insbesondere geht (32) über in

$$w^{(\nu)} = a_\nu + \cfrac{\lambda_\nu (1 + a_\nu^2)}{z - a_\nu - (1 + \lambda_\nu)\,\cfrac{1 + a_\nu^2}{a_\nu - w^{(\nu+1)}}}, \tag{32$'$}$$

wo zur Abkürzung $a_\nu \equiv u_\nu^{(\nu)}$ gesetzt worden ist.

Es stellt sich nun die Frage: welche Eigenschaften erhält diejenige Funktion $w \equiv w^{(1)}$, die durch (32)′ definiert wird, wenn für

$w^{(n+1)}$ eine beliebige Funktion der Klasse I eingesetzt wird und den Konstanten a_ν beliebige reelle, den Konstanten λ_ν beliebige *positive* Werte gegeben werden? Führt man die Auflösung von (32)', von $w^{(n+1)}$ ausgehend, schrittweise aus, so sieht man leicht ein, dass die Funktion $w \equiv w^{(1)}$ unter den obigen Voraussetzungen der Klasse I angehören muss und dass sie ferner eine asymptotische Entwicklung der Form

(33) $$w = c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_{2n-1}}{z^{2n-1}} + \varphi_n(z)$$

hat, wo φ_n in jedem Winkelraum $\varepsilon \leqq \arg z \leqq \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ folgende Eigenschaft besitzt:

(34) $$\lim_{z=\infty} z^{2n-1}\varphi_n(z) = c^*_{2n-1},$$

wo c^*_{2n-1} (endlich) reell und nichtnegativ ist; ferner ist $c^*_{2n-1} \neq 0$ oder $= 0$, je nachdem der Abbildungsmodul von $w^{(n+1)}$ im Punkte $z = \infty$ endlich oder unendlich ist, d. h. je nachdem der reelle Grenzwert [1])

$$\lim_{z=\infty} \frac{w^{(n+1)}}{z}$$

positiv oder Null ist. Die Koeffizienten $c_0, \cdots, c_{2n-1}$ sind ebenfalls reell und berechnen sich (rational) mit Hilfe der gegeben Konstanten.

Umgekehrt schliesst man aber (wie in § 1, unter Anwendung des Juliasschen Lemmas), dass wenn eine Folge *reeller* Zahlen

(35) $$c_0, c_1, \cdots, c_{2n-1} \quad (n \geqq 1)$$

gegeben ist und w eine Funktion der Klasse I bezeichnet, welche die asymptotische Entwicklung (33) hat, wo φ_n im Winkelraum $\varepsilon \leqq \arg z \leqq \pi - \varepsilon$ der Bedingung

(36) $$\lim_{z=\infty} z^{2n-1}\varphi_n(z) = 0$$

genügt, entweder

[1]) Dass dieser reelle Grenzwert immer existiert, ist der Inhalt des Carathéodoryschen Satzes (S. 15).

$$c_1 = 0,$$

in welchem Fall $w \equiv c_0$ und $c_2 = c_3 = \cdots = c_{2n-1} = 0$, oder

$$c_1 > 0$$

und die Funktion $w^{(2)}$, welche durch die Beziehung

$$(37) \quad w = a_1 + \frac{\lambda_1 (1 + a_1^2)}{z - a_1 - (1 + \lambda_1) \frac{1 + a_1^2}{a_1 - w^{(2)}}} \quad \left(a_1 = c_0, \lambda_1 = \frac{c_1}{1 + a_1^2} \right)$$

definiert wird, folgende Eigenschaft hat:

$w^{(2)}$ gehört der Klasse I an und hat eine asymptotische Darstellung der Form

$$w^{(2)} = c_0^{(2)} + \frac{c_1^{(2)}}{z} + \cdots + \frac{c_{2n-3}^{(2)}}{z^{2n-3}} + \varphi_{n-1}(z),$$

wobei $z^{2n-2} \varphi_{n-1} \to 0$, wenn z (innerhalb des mehrmals erwähnten Winkelraums) gegen Unendlich rückt. Die Koeffizienten $c_\nu^{(2)}$ sind *reell* und berechnen sich rational aus den Koeffizienten (35).

Durch wiederholte Anwendung dieses Resultats definiert man der Reihe nach die Funktionen $w^{(3)}, \cdots, w^{(\nu)}, \cdots$. Die Funktion $w^{(\nu)}$ gehört der Klasse I an und besitzt für $z \to \infty$ eine asymptotische Entwicklung, deren Koeffizienten $c_0^{(\nu)}, \cdots, c_{2n-2\nu+1}^{(\nu)}$ reell sind und durch die Zahlen (35) rational ausgedrückt werden. Die Funktionen $w^{(\nu)}$ berechnen sich mittels der Rekursionsformel (32)′, wo

$$a_\nu = c_0^{(\nu)}, \lambda_\nu = \frac{c_1^{(\nu)}}{1 + a_\nu^2} \qquad \left(c_k^{(1)} \equiv c_k \right).$$

Für die Funktion $w^{(n+1)}$ bleibt die einzige Bedingung übrig, der Klasse I anzugehören und für $z \to \infty$ einen unendlichen Abbildungsmodul zu haben. Falls das Restglied φ_n der Bedingung (34) (statt (36)) genügt, wird der Abbildungsmodul von $w^{(n+1)}$ für $z = \infty$ *endlich*.

Notwendig und hinreichend, damit eine Funktion w der Klasse I existiert, welche eine asymptotische Entwicklung (33) besitzt, wo die Koeffizienten c_ν reell sind und das Restglied φ_n der Bedingung (36) genügt, ist also, dass entweder, für ein gewisses $k \leq n$,

(38) $\lambda_\nu > 0\ (\nu < k),\ \lambda_k = 0,\ c_\mu^{(k)} = 0 \quad (\mu = k+1, \cdots, 2n-2k+1),$

oder

(39) $\lambda_\nu > 0 \quad (\nu = 1, \cdots, n).$

Im Falle (38) ist das Problem bestimmt; die einzige Lösung ist rational und von $(k-1)$:er Ordnung. Im allgemeinen Falle (39) wird die Gesamtheit der Lösungen gegeben durch

(40) $$w = \frac{A_n + B_n w^{(n+1)}}{C_n + D_n w^{(n+1)}},$$

wo $w^{(n+1)}$ eine beliebige Funktion der Klasse I ist, und die Polynome A_n, B_n, C_n und D_n, wie früher, durch die Formeln (30) bestimmt sind. Die rationalen Funktionen P_n, Q_n, R_n, S_n sind, wie vorher, durch die Rekursionsformeln (18) S. 60 zu berechnen, wobei $a_\nu = b_\nu = \varepsilon_\nu = 1$ und die Variable z und die Funktionenwerte $\bar{\eta} = w_\nu^{(\nu)}$ gemäss (25) und $(27)'$ (S. 67 bzw. 69) durch

$$\frac{z-i}{z+i} \text{ bzw. } \frac{ia_\nu - 1}{ia_\nu + 1}$$

ersetzt werden sollen.

55. Nunmehr sind wir auch im Besitz der Lösung des folgenden allgemeinen Problems:

Gegeben ist eine unendliche Folge reeller[1]) *Zahlen*

$$c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots.$$

Unter welchen Bedingungen existiert eine Funktion $w(z)$ der Klasse I, welche von der Reihe

(41) $$\sum_0^\infty \frac{c_n}{z^n}$$

im unendlich fernen Punkte asymptotisch dargestellt wird in der Weise, dass

---

1) Hierin besteht die Einschränkung bezüglich der vorgegebenen Koeffizienten c_ν, worauf S. 66 hingewiesen wurde.

$$z^n\left(w - \sum_0^n \frac{c_\nu}{z^\nu}\right) \to 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

wenn z *innerhalb des Winkelraums* $\varepsilon \leq \arg z \leq \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ *gegen* ∞ *strebt?*

Die notwendigen und hinreichenden Existenzbedingungen sind durch (38) bzw. (39) gegeben (wobei $n = \infty$).

Das Problem ist dann und nur dann bestimmt, wenn die Summe

$$\sum \frac{1}{\lambda_n}$$

unendlich ist.

Wenn diese Reihe konvergiert, so ist die Gesamtheit der Lösungen durch

$$w = \frac{A + B w_\infty}{C + D w_\infty} \tag{42}$$

definiert, wo A, B, C, D die S. 70 besprochenen, für $y > 0$ regulären Grenzfunktionen der rationalen Funktionen A_n, B_n, C_n, D_n (vgl. (40) S. 73 und (30) S. 69) bezeichnen.

56. Wir bemerken nochmals, dass die zuletzt besprochenen Ergebnisse am einfachsten direkt, unter Anwendung des Juliaschen Lemmas hergeleitet werden können. In unserer S. 4 Fussnote [2]) zitierten Arbeit haben wir in dieser Weise das vorliegende Problem eingehend behandelt und zugleich nachgewiesen, dass es äquivalent mit dem bekannten Stieltjesschen Momentenproblem ist.

In seiner von Herrn Hamburger [1]) gegebenen, erweiterten Form lautet das letztgenannte Problem folgendermassen:

Unter welchen Bedingungen existiert eine monoton zunehmende Funktion $\psi(x)$, *deren Momente vorgegebene reelle Werte* c_n $(n = 1, 2 \cdots)$ *annehmen:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1}\, d\psi(x) = c_n \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{43}$$

[1]) H. Hamburger: *Über eine Erweiterung des STIELTJESschen Momentenproblems* I, II, III (Math. Annalen B. 81, 1920, B. 81, 1921).

Wann ist das Problem bestimmt, und welches ist im Unbestimmtheitsfalle die Gesamtheit der Lösungen $\psi(x)$?

Der Zusammenhang der soeben erwähnten zwei Probleme ist folgender:

Wenn $\psi(x)$ eine Lösung des Momentenproblems ist, so stellt die Funktion

$$w = c_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z - x}$$

eine Funktion dar, welche der Klasse I angehört und von der Reihe (41) asymptotisch dargestellt wird. Und umgekehrt: wenn w den letztgenannten Bedingungen genügt, so strebt der Imaginärteil der Integralfunktion von w

$$V(z) = \mathfrak{J}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{z_0}^{z} w(z)\, dz\right)$$

bei Annäherung an einen Punkt x der reellen Achse gegen einen Grenzwert

$$\psi(x) = \lim_{y=0} V(x, y),$$

welcher eine Lösung des Momentenproblems darstellt.

Die Lösungen der S. 73 und 74 formulierten Probleme entsprechen also eineindeutig einander. Durch die obigen Ergebnisse hat mithin auch das Momentenproblem eine vollständige Lösung gefunden[1]).

[1]) Eine andere, von der obigen unabhängige Lösung ist von Herrn Carleman gegeben worden (*Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Uppsala Universitets Årsskrift, 1923).

ZUR THEORIE DES JACOBISCHEN KETTENBRUCHALGORITHMUS ZWEITER ORDNUNG.

VON

K. VÄISÄLÄ

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI-AKTIENGESELLSCHAFT SANA

Zur Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus zweiter Ordnung.

1. Unter der Theorie des JACOBIschen Kettenbruchalgorithmus zweiter Ordnung im allgemeinsten Sinne versteht man bekanntlich die Theorie der Rekursionsformeln

$$(1)\qquad \begin{aligned} P_{\nu+3} &= k_\nu P_\nu + l_\nu P_{\nu+1} + m_\nu P_{\nu+2}, \\ P'_{\nu+3} &= k_\nu P'_\nu + l_\nu P'_{\nu+1} + m_\nu P'_{\nu+2}, \\ P''_{\nu+3} &= k_\nu P''_\nu + l_\nu P''_{\nu+1} + m_\nu P''_{\nu+2}, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \\ P'_0 &= 0, \quad P'_1 = 1, \quad P'_2 = 0, \\ P''_0 &= 0, \quad P''_1 = 0, \quad P''_2 = 1 \end{aligned}$$

ist und k_ν, l_ν, m_ν beliebige Zahlen bedeuten[1]).

In der vorliegenden Arbeit werden wir hinsichtlich dieses Algorithmus zunächst folgenden Konvergenzsatz beweisen:

Satz I: *Wenn die Zahlen k_ν, l_ν, m_ν reell sind und für $\nu \geqq 1$ den Ungleichungen*

$$(2)\qquad \sqrt[3]{\nu}\, m_\nu \geqq c, \quad \sqrt[3]{\nu}\, m_\nu \geqq c l_\nu \geqq 0, \quad \sqrt[3]{\nu}\, m_\nu \geqq c k_\nu \geqq 0, \quad k_0 > 0$$

genügen, wo c eine von ν unabhängige positive Zahl bedeutet, so konvergieren die Quotienten

$$\frac{P'_\nu}{P_\nu} \text{ und } \frac{P''_\nu}{P_\nu}$$

gegen bestimmte endliche Grenzwerte.

---

[1]) JACOBI, Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird (Journ. f. Math., Bd. 69; Werke, Bd. 6).

Die Konvergenz ist früher unter der mehr einschränkenden Voraussetzung

$$m_\nu \geqq c, \quad m_\nu \geqq c l_\nu \geqq 0, \quad m_\nu \geqq c k_\nu \geqq 0, \quad k_0 > 0$$

von Perron bewiesen worden.[1]

Der Kettenbruchalgorithmus im engeren Sinne oder, wie man zu sagen pflegt, ein regelmässiger Kettenbruchalgorithmus entsteht, wenn man für jedes ν $k_\nu = 1$ setzt und die Zahlen l_ν und m_ν, von zwei positiven Konstanten α_0 und β_0 ausgehend, durch die Rekursionsformeln

$$(3) \qquad \alpha_\nu = l_\nu + \frac{1}{\beta_{\nu+1}}, \quad \beta_\nu = m_\nu + \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}}$$

definiert, wo l_ν und m_ν die grössten in α_ν bzw. β_ν enthaltenen ganzen Zahlen bedeuten. Es ist dann bekanntlich

$$\alpha_0 = \lim_{\nu=\infty} \frac{P'_\nu}{P_\nu}, \quad \beta_0 = \lim_{\nu=\infty} \frac{P''_\nu}{P_\nu}.\text{[2]}$$

Die Konvergenz ist so stark, dass

$$\limsup_{\nu=\infty} |P'_\nu - \alpha_0 P_\nu| = M, \quad \limsup_{\nu=\infty} |P''_\nu - \beta_0 P_\nu| = N$$

ist, wo M und N endliche Konstanten bedeuten.[3] Dass M und N auch grösser als Null sein können, hat Perron an einem Beispiel dargetan. Im Folgenden wollen wir näher untersuchen, wann dies überhaupt eintreten kann, und wir gelangen zum Resultat:

---

[1] O. Perron, Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus (Math. Ann., Bd. 64 (1907)) und Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenbruchalgorithmen mit komplexen Elementen (Münch. Ber., Bd. 37 (1907)).

[2] Wir lassen den speziellen Fall unberücksichtigt, dass der Algorithmus „Störungen" (Unterbrechungen) erleidet. In diesem Falle reduziert sich nämlich der Algorithmus zum Kettenbruchalgorithmus erster Ordnung.

[3] O. Perron, Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalsatzes (Münch. Ber., Bd. 38 (1908)).

Satz II: $\limsup_{\nu=\infty} |P'_\nu - a_0 P_\nu| = M$ *kann nur in folgenden zwei Fällen grösser als Null sein:*

1°. *Wenn*

$$\lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{l_\nu}{m_\nu} = 1$$

ist. Dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} |P'_\nu - a_0 P_\nu| = M.$$

2°. *Wenn*

$$\lim_{\nu=\infty} m_{h+2\nu} = \infty, \quad m_{h+2\nu+1} = 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist. h bedeutet hierbei eine Konstante. In diesem Falle ist

$$\lim_{\nu=\infty} |P'_{h+2\nu} - a_0 P_{h+2\nu}| = M, \quad \lim_{\nu=\infty} |P'_{h+2\nu+1} - a_0 P_{h+2\nu+1}| = 0$$

Ein ähnlicher Satz gilt natürlich auch für $P''_\nu - \beta_0 P_\nu$. Das von PERRON angegebene Beispiel gehört zur Kategorie 2°. Es ist nicht schwer, auch für Kategorie 1° Beispiele zu konstruieren, in denen $M > 0$ ist.

Da bei einem periodischen Kettenbruch die Zahlen l_ν und m_ν endlich sind, so folgt aus dem obigen Satz unmittelbar

Satz III: *Wenn der Algorithmus* (3) *periodisch ist, so ist*

$$\lim_{\nu=\infty} (P'_\nu - a_0 P_\nu) = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} (P''_\nu - \beta_0 P_\nu) = 0.$$

a_0 und β_0 sind in diesem Falle, wie bekannt, kubische Irrationalitäten. Satz III ist von PERRON in dem Falle bewiesen, dass die Konjugierten von a_0 und β_0 imaginär sind[1]).

2. Um den Satz I zu beweisen, beachte man zunächst, dass für $\nu > 2$ nach der Annahme (2) mit Rücksicht auf die Rekursionsformeln (1)

$$P_\nu \geqq m_1 m_2 \cdots m_{\nu-3} k_0 \geqq c^{\nu-3} k_0 > 0$$

[1]) „Grundlagen usw.", siehe die Fussnote [1]) S. 4.

ist, so dass die Quotienten $\frac{P'_\nu}{P_\nu}$ und $\frac{P''_\nu}{P_\nu}$ für $\nu > 2$ einen Sinn haben. Wir setzen zur Abkürzung

$$d_\mu = \frac{P'_\mu}{P_\mu} - \frac{P'_{\mu+1}}{P_{\mu+1}}$$

und beweisen zunächst, dass

(4) $$\lim_{\mu=\infty} d_\mu = 0$$

ist.

Wenn A, B, C, und $\alpha A + \beta B + \gamma C$ von Null verschieden sind, so gilt die Formel

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha A + \beta B + \gamma C} - \frac{c}{C} = \frac{\alpha A}{\alpha A + \beta B + \gamma C}\left(\frac{a}{A} - \frac{c}{C}\right) + \frac{\beta B}{\alpha A + \beta B + \gamma C}\left(\frac{b}{B} - \frac{c}{C}\right).$$

Mit Hilfe dieser Formel finden wir für $\nu \geq 4$

$$-d_{\nu+2} = \frac{P'_{\nu+3}}{P_{\nu+3}} - \frac{P'_{\nu+2}}{P_{\nu+2}} = \frac{k_\nu P'_\nu + l_\nu P'_{\nu+1} + m_\nu P'_{\nu+2}}{k_\nu P_\nu + l_\nu P_{\nu+1} + m_\nu P_{\nu+2}} - \frac{P'_{\nu+2}}{P_{\nu+2}}$$

$$= \frac{k_\nu P_\nu}{P_{\nu+3}}\left(\frac{P'_\nu}{P_\nu} - \frac{P'_{\nu+2}}{P_{\nu+2}}\right) + \frac{l_\nu P_{\nu+1}}{P_{\nu+3}} \cdot d_{\nu+1}$$

und

$$\frac{P'_{\nu+2}}{P_{\nu+2}} - \frac{P'_\nu}{P_\nu} = \frac{k_{\nu-1} P'_{\nu-1} + l_{\nu-1} P'_\nu + m_{\nu-1} P'_{\nu+1}}{k_{\nu-1} P_{\nu-1} + l_{\nu-1} P_\nu + m_{\nu-1} P_{\nu+1}} - \frac{P'_\nu}{P_\nu}$$

$$= \frac{k_{\nu-1} P_{\nu-1}}{P_{\nu+2}} \cdot d_{\nu-1} - \frac{m_{\nu-1} P_{\nu+1}}{P_{\nu+2}} \cdot d_\nu.$$

Bezeichnen wir mit D_ν den grössten von den absoluten Beträgen der Zahlen $d_{\nu-1}$, d_ν und $d_{\nu+1}$, so wird

$$\left|\frac{P'_\nu}{P_\nu} - \frac{P'_{\nu+2}}{P_{\nu+2}}\right| \leq \frac{k_{\nu-1} P_{\nu-1} + m_{\nu-1} P_{\nu+1}}{P_{\nu+2}} \cdot D_\nu \leq D_\nu$$

und folglich

$$|d_{\nu+2}| \leq \frac{k_\nu P_\nu + l_\nu P_{\nu+1}}{P_{\nu+3}} \cdot D_\nu = \frac{P_{\nu+3} - m_\nu P_{\nu+2}}{P_{\nu+3}} \cdot D_\nu = (1 - t_\nu) D_\nu,$$

wo zur Abkürzung

$$t_\nu = \frac{m_\nu P_{\nu+2}}{P_{\nu+3}}$$

gesetzt ist. Es ist somit

$$D_{\nu+1} \leqq D_\nu .$$

In dem folgenden Art. werden wir zeigen, dass für $\nu \geqq 4$

(5) $$t_\nu > \frac{C}{\nu}$$

ist, wo C eine Konstante bedeutet. Aus der letzten Beziehung S. 6 ergibt sich nun leicht

$$D_{\nu+3} < \left(1 - \frac{C}{\nu+2}\right) D_\nu .$$

Wiederholte Anwendung dieser Relation führt zu

$$D_{4+3p} < D_4 \cdot \prod_{\nu=2}^{p+1} \left(1 - \frac{C}{3\nu}\right) .$$

Die rechte und folglich auch die linke Seite dieser Ungleichung nähert sich, wie bekannt, mit wachsendem p dem Grenzwerte 0. Damit ist die Beziehung (4) bewiesen.

3. Wir haben nun also zu zeigen, dass die Konstante C sich so bestimmen lässt, dass die Ungleichung (5) besteht. Mit Rücksicht auf (1) können wir

$$\frac{1}{t_\nu} = \frac{P_{\nu+3}}{m_\nu P_{\nu+2}} = \frac{k_\nu P_\nu}{m_\nu P_{\nu+2}} + \frac{l_\nu P_{\nu+1}}{m_\nu P_{\nu+2}} + 1$$

schreiben. Mit Hilfe von (1) bekommt man leicht

$$P_{\nu+2} \geqq m_{\nu-1} m_{\nu-2} P_\nu ,$$

woraus wegen (2)

$$\frac{k_\nu P_\nu}{m_\nu P_{\nu+2}} \leqq \frac{k^\nu}{m_\nu m_{\nu-1} m_{\nu-2}} \leqq \frac{1}{c^3} \cdot \sqrt[3]{\nu(\nu-1)(\nu-2)} < c_1 \nu$$

folgt. c_1 bedeutet hierbei eine Konstante. Ebenso findet man

$$\frac{l_\nu P_{\nu+1}}{m_\nu P_{\nu+2}} \leq \frac{1}{m_\nu m_{\nu-1}} \leq \frac{1}{c^2} \cdot \sqrt[3]{\nu(\nu-1)} < c_2 \nu.$$

Es ist also

$$\frac{1}{t_\nu} < c_1 \nu + c_2 \nu + 1 < \frac{\nu}{C},$$

worin C eine Konstante bedeutet. Die Ungleichung (5) ist hiermit als richtig erwiesen.

4. Dass $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{P'_\nu}{P_\nu}$ existiert, lässt sich jetzt aus (4) folgendermassen schliessen.

Es sei $\nu > 2$ und q_ν und Q_ν der kleinste bzw. der grösste der Quotienten

$$\frac{P'_\nu}{P_\nu}, \ \frac{P'_{\nu+1}}{P_{\nu+1}}, \ \frac{P'_{\nu+2}}{P_{\nu+2}}.$$

q_ν und Q_ν sind endliche, nicht negative Zahlen. Dann ist bekanntlich

$$q_\nu \leq \frac{k_\nu P'_\nu + l_\nu P'_{\nu+1} + m_\nu P'_{\nu+2}}{k_\nu P_\nu + l_\nu P_{\nu+1} + m_\nu P_{\nu+2}} \leq Q_\nu,$$

mit anderen Worten

$$q_\nu \leq \frac{P'_{\nu+3}}{P_{\nu+3}} \leq Q_\nu,$$

d. h.

$$q_{\nu+1} \geq q_\nu,$$
$$Q_{\nu+1} \leq Q_\nu.$$

Da ferner $Q_\nu - q_\nu$ den grössten der absoluten Beträge

$$|d_\nu|, \ |d_{\nu+1}|, \ \left|\frac{P'_\nu}{P_\nu} - \frac{P'_{\nu+2}}{P_{\nu+2}}\right|$$

bedeutet und, wie leicht ersichtlich, die letzte Zahl $\leq |d_\nu| + |d_{\nu+1}|$ ist, so muss wegen (4)

$$\lim_{\nu=\infty} (Q_\nu - q_\nu) = 0$$

sein. Aus dem Obigen folgt, dass die Zahlen q_ν und Q_ν und mithin auch der Quotient $\frac{P'_\nu}{P_\nu}$ mit wachsendem ν gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert konvergieren.

In analoger Weise lässt es sich beweisen, dass $\lim_{\nu=\infty}\frac{P''_\nu}{P_\nu}$ ebenfalls existiert.

5. Jetzt gehen wir zum Beweise des Satzes II über. Da der betreffende Algorithmus nun regelmässig ist, so nehmen die zwei ersten der Rekursionsformeln (1) die Gestalt

$$(6)\qquad \begin{aligned} P_{\nu+3} &= P_\nu + l_\nu P_{\nu+1} + m_\nu P_{\nu+2}, \\ P'_{\nu+3} &= P'_\nu + l_\nu P'_{\nu+1} + m_\nu P'_{\nu+2}, \end{aligned}$$

an, wobei l_ν und m_ν nichtnegative ganze Zahlen sind und zwar für $\nu \geqq 1$ den Ungleichungen

$$(7)\qquad m_\nu \geqq 1, \; l_\nu \leqq m_\nu$$

genügen. Durch vollständige Induktion lässt sich leicht die Relation

$$(8)\qquad \alpha_0 = \frac{P'_\nu + \alpha_\nu P'_{\nu+1} + \beta_\nu P'_{\nu+2}}{P_\nu + \alpha_\nu P_{\nu+1} + \beta_\nu P_{\nu+2}}$$

beweisen.

Bezeichnen wir zur Abkürzung

$$H_\nu = P'_\nu - \alpha_0 P_\nu,$$

so ergibt sich aus (6)

$$(9)\qquad H_{\nu+3} = H_\nu + l_\nu H_{\nu+1} + m_\nu H_{\nu+2}$$

und aus (8) ebenso

$$(10)\qquad H_{\nu+2} = -\frac{1}{\beta_\nu} H_\nu - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} H_{\nu+1}.$$

Weil α_0 und β_0, wie PERRON[1]) bewiesen hat, irrational sind, so ist

[1]) Siehe die Fussnote [3]) S. 4.

H_ν für $\nu > 2$ stets von Null verschieden. Aus (3) findet man weiter für $\nu > 0$

(11) $$0 < \frac{1}{\beta_\nu} < 1, \quad 0 < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < 1.$$

Aus (10) leuchtet ein, dass $H_\nu, H_{\nu+1}, H_{\nu+2}$ niemals gleichbezeichnet sind. Haben daher $H_{\nu+1}$ und $H_{\nu+2}$ das gleiche Vorzeichen, so ist das Vorzeichen von H_ν und $H_{\nu+3}$ das entgegengesetzte. Dann ist nach (9) mit Rücksicht auf (7)

$$|H_{\nu+3}| = |H_\nu| - l_\nu |H_{\nu+1}| - m_\nu |H_{\nu+2}| < |H_\nu|.$$

Haben $H_{\nu+1}$ und $H_{\nu+2}$ dagegen entgegengesetzte Zeichen, so ergibt sich aus (10), wenn man darin ν durch $\nu + 1$ ersetzt und (11) berücksichtigt,

$$|H_{\nu+3}| = \left| \frac{1}{\beta_{\nu+1}} |H_{\nu+1}| - \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}} |H_{\nu+2}| \right| < \text{Max.}(|H_{\nu+1}|, |H_{\nu+2}|).$$

Es ist sonach jedenfalls

$$|H_{\nu+3}| < \text{Max.}(|H_\nu|, |H_{\nu+1}|, |H_{\nu+2}|).$$

Hieraus schliesst man leicht, dass für alle i, die > 2 sind,

(12) $$|H_{\nu+i}| < \text{Max.}(|H_\nu|, |H_{\nu+1}|, |H_{\nu+2}|)$$

ist. Diese Ungleichung besagt die bekannte Tatsache, dass $\limsup_{\nu=\infty} H_\nu$ endlich ist.

6. Wir setzen von jetzt ab voraus, dass

(13) $$\limsup_{\nu=\infty} |H_\nu| = M > 0$$

ist und zeigen zunächst, dass es zu jeder positiven Zahl ε einen Index ν' bestimmen lässt, so dass wenigstens eine der Ungleichungen

(14) $$\begin{aligned} M - \varepsilon < |H_\nu| < M + \varepsilon, \\ M - \varepsilon < |H_{\nu+1}| < M + \varepsilon \end{aligned}$$

besteht, sofern nur $\nu > \nu'$ ist.

Da wegen (13) für genügend grosse ν $|H_\nu|$ und $|H_{\nu+1}|$ kleiner als $M+\varepsilon$ sind, so brauchen wir unsere Behauptung offenbar nur unter der Annahme

$$(15) \qquad |H_\nu| < M, \ |H_{\nu+1}| < M$$

zu beweisen. Aus diesen Ungleichungen folgt zunächst, dass H_ν und $H_{\nu+1}$ gleiche Vorzeichen besitzen. Andernfalls wäre nämlich wegen (10) und (11) $|H_{\nu+2}| < \text{Max.}(|H_\nu|, |H_{\nu+1}|)$ und somit nach (12) für $i > 2$

$$|H_{\nu+i}| < \text{Max.}(|H_\nu|, |H_{\nu+1}|) < M,$$

was mit (13) nicht verträglich ist. Weiter müssen $H_{\nu-1}$ und $H_{\nu+2}$ das entgegengesetzte Zeichen haben wie H_ν und $H_{\nu+1}$. Aus (9) mit Rücksicht auf (7) ergibt sich daher

$$(16) \quad |H_{\nu+2}| = |H_{\nu-1} + l_{\nu-1} H_\nu + m_{\nu-1} H_{\nu+1}| \leqq |H_{\nu-1}| - |H_{\nu+1}|.$$

Es muss

$$(17) \qquad |H_{\nu+2}| \geqq M$$

sein, denn die Annahme $|H_{\nu+2}| < M$ würde wegen (12) und (15) zur Unmögligkeit

$$|H_{\nu+i}| < \text{Max.}(|H_\nu|, |H_{\nu+1}|, |H_{\nu+2}|) < M \quad (i > 2)$$

führen. Die Beziehungen (16) und (17) haben zur Folge

$$|H_{\nu+1}| \leqq |H_{\nu-1}| - M.$$

Der Ausdruck rechts wird wegen (13) für genügend grosse ν kleiner als ε, so dass dann

$$(18) \qquad |H_{\nu+1}| < \varepsilon$$

ist. Aus der Relation (10) mit Rücksicht auf (17) und (18) ergibt sich nun, wenn ν eine gewisse Zahl ν' überschreitet,

$$M \leqq |H_{\nu+2}| < |H_\nu| + |H_{\nu+1}| < |H_\nu| + \varepsilon,$$

d. h.

$$(19) \qquad M - \varepsilon < |H_\nu|.$$

Aus (15) und (19) geht hervor, dass im betreffenden Falle die erstere der Ungleichungen (14) befriedigt ist, sobald $\nu > \nu'$ ist.

Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen.

7. Zunächst behandeln wir den Fall

$$\liminf_{\nu=\infty} |H_\nu| = k < M. \tag{20}$$

Es werde die positive Zahl ε so klein gewählt, dass

$$k + \varepsilon < M - \varepsilon \tag{21}$$

ist. Die Beziehung (20) besagt dann, dass für unendlich viele ν $|H_{\nu+1}| < k + \varepsilon$ und a fortiori

$$|H_{\nu+1}| < M - \varepsilon. \tag{22}$$

Dem vorigen Art. gemäss lässt sich ν_0 dann so bestimmen, dass aus (22) stets die Relationen

$$\begin{aligned} M - \varepsilon < |H_\nu| &< M + \varepsilon, \\ M - \varepsilon < |H_{\nu+2}| &< M + \varepsilon \end{aligned} \tag{23}$$

folgen, sobald $\nu > \nu_0$ ist.

Wir setzen jetzt ν in der Weise fest, dass (22) besteht und $\nu > \nu_0$ ist, d. h. die Relationen (23) gelten. Zunächst zeigen wir, dass wir dazu annehmen dürfen, dass H_ν und $H_{\nu+1}$ entgegengesetzte Zeichen haben.

Zu dem Ende nehmen wir an, dass H_ν und $H_{\nu+1}$ gleiche Zeichen besitzen. Aus dieser Annahme folgt, dass $H_{\nu-1}$ und $H_{\nu+2}$ das entgegengesetzte Zeichen haben wie H_ν und $H_{\nu+1}$. Die Relation (9) liefert somit mit Rücksicht auf (23) und (7):

$$M - \varepsilon < |H_{\nu+2}| = |H_{\nu-1}| - l_{\nu-1}|H_\nu| - m_{\nu-1}|H_{\nu+1}| \leqq |H_{\nu-1}| - |H_{\nu+1}|. \tag{24}$$

Hieraus ergibt sich die Ungleichung links in

$$M - \varepsilon < |H_{\nu-1}| < M + \varepsilon. \tag{25}$$

Man nehme an, ν sei so gross gewählt, dass wegen (13) die

Ungleichung rechts in (25) ebenfalls richtig ist. Nach (24) ist $|H_{\nu+1}| \leqq |H_{\nu-1}| - |H_{\nu+2}|$ und folglich mit Rücksicht auf (23) und (25)

(26) $$|H_{\nu+1}| < 2\,\varepsilon.$$

Aus (10) erhält man ferner wegen (23), (26) und (11)

$$M - \varepsilon < |H_{\nu+2}| = \frac{1}{\beta_\nu}|H_\nu| + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}|H_{\nu+1}| < \frac{1}{\beta_\nu}(M + \varepsilon) + 2\,\varepsilon,$$

woraus sich für genügend kleines ε

$$\beta_\nu < \frac{M + \varepsilon}{M - 3\,\varepsilon} < 2$$

ergibt. Nach (3) und (7) muss dann $m_\nu = 1$ und $l_\nu = 0$ oder 1 sein. Die Relation (9) liefert nun

$$\begin{aligned} |H_{\nu+3}| &= \big|\,|H_\nu| + |H_{\nu+1}| - |H_{\nu+2}|\,\big| \\ &\leqq \big|\,|H_\nu| - |H_{\nu+2}|\,\big| + |H_{\nu+1}|, \end{aligned}$$

so dass wegen (23) und (26)

$$|H_{\nu+3}| < 4\,\varepsilon$$

ist.

Da $4\,\varepsilon < M - \varepsilon$ angenommen werden darf, so bleibt nach der zuletzt gefundenen Ungleichung die Beziehung (22) und folglich auch die Beziehungen (23) richtig, wenn ν durch $\nu + 2$ ersetzt wird. Hätten nun $H_{\nu+2}$ und $H_{\nu+3}$ gleiche Zeichen, so dürfte man bei der obigen Beweisführung überall $\nu + 2$ an Stelle von ν einsetzen. So würde z. B. nach (25) $|H_{\nu+1}| > M - \varepsilon$ sein, was jedoch für genügend kleines ε mit der Ungleichung (26) im Widerspruch steht. Es ist mithin gestattet anzunehmen, dass $H_{\nu+2}$ und $H_{\nu+3}$ entgegengesetzte Zeichen haben. Bezeichnet man nun ν an Stelle von $\nu + 2$, so besitzen H_ν und $H_{\nu+1}$ die erwünschten Eigenschaften.

8. Wir dürfen also voraussetzen, dass $\nu > \nu_0$ so festgesetzt ist, dass die Relation (22) und folglich auch die Relationen (23) bestehen und dazu H_ν und $H_{\nu+1}$ entgegengesetzte Zeichen haben.

$H_{\nu+1}$ und $H_{\nu+2}$ müssen dann gleiche Zeichen haben, denn die entgegengesetzte Voraussetzung würde wegen (23), (10), (11) und (22) zur Unmögligkeit

$$M-\varepsilon < |H_{\nu+2}| = -\frac{1}{\beta_\nu}|H_\nu| + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}|H_{\nu+1}| < |H_{\nu+1}| < M-\varepsilon$$

führen. Man findet daher

$$M-\varepsilon < |H_{\nu+2}| = \frac{1}{\beta_\nu}|H_\nu| - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}|H_{\nu+1}| < \frac{1}{\beta_\nu}|H_\nu| < \frac{M+\varepsilon}{\beta_\nu},$$

woraus sich

$$\beta_\nu = m_\nu + \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}} < \frac{M+\varepsilon}{M-\varepsilon}$$

ergibt. Da für genügend kleines ε der Ausdruck rechts $< 1 + \frac{3\varepsilon}{M} < 2$ ist, so muss dann

(27) $$m_\nu = 1, \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}} < \frac{3\varepsilon}{M}$$

sein. Aus (9) mit Rücksicht auf (7) und (23) erhält man ferner

(28) $$|H_{\nu+3}| = |H_\nu| - l_\nu|H_{\nu+1}| - m_\nu|H_{\nu+2}| \leq |H_\nu| - |H_{\nu+2}| < 2\varepsilon$$

Weil $2\varepsilon < M-\varepsilon$ angenommen werden darf, so wird

$$|H_{\nu+3}| < M-\varepsilon.$$

Die Beziehung (22) bleibt hiernach bestehen, wenn ν durch $\nu+2$ ersetzt wird. Da weiter $H_{\nu+2}$ und $H_{\nu+3}$ entgegengesetzte Zeichen haben, so gilt die im Anfang dieses Art. gemachte Voraussetzung, wenn ν durch $\nu+2$ ersetzt wird. So kann man fortfahren und gelangt schliesslich zum Resultat, dass alle Beziehungen in diesem Art. bestehen bleiben, wenn $\nu+2\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, \cdots)$ an Stelle von ν eingesetzt wird.

Die erste Folgerung aus dem Ebengesagten ist nach (27), dass

(29) $$m_{\nu+2\mu} = 1 \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist. Da ferner wegen (27) und (3)

$$\frac{3\,\varepsilon}{M} > \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}} = \frac{l_{\nu+1} + \dfrac{1}{\beta_{\nu+2}}}{\beta_{\nu+1}} \geqq \frac{1}{\beta_{\nu+1}\,\beta_{\nu+2}}$$

und wegen (3), (29) und (11)

$$\beta_{\nu+2} = m_{\nu+2} + \frac{\alpha_{\nu+3}}{\beta_{\nu+3}} < 2$$

ist, so findet man $\beta_{\nu+1} > \dfrac{M}{6\,\varepsilon}$ und mithin

$$m_{\nu+1} > \frac{M}{6\,\varepsilon} - 1\,.$$

Dem Obigen gemäss bleibt diese Ungleichung richtig, wenn ν durch $\nu + 2\,\mu$ ersetzt wird. Hieraus schliesst man, dass

(30) $$\lim_{\mu=\infty} m_{\nu+2\,\mu+1} = \infty$$

ist. Da es erlaubt ist, auch in (23) und (28) $\nu + 2\,\mu$ an Stelle von ν einzusetzen, so findet man

(31) $$\begin{aligned} &\lim_{\mu=\infty} |\,H_{\nu+2\,\mu}\,| = M, \\ &\lim_{\mu=\infty} |\,H_{\nu+2\mu+1}\,| = 0. \end{aligned}$$

So haben wir nachgewiesen (vgl. (29), (30) und (31)), dass unter der Annahme (20) der Fall 2° des Satzes II vorliegt.

9. Wir gehen jetzt zur Behandlung des Falles $k = M$, d. h.

(32) $$\lim_{\nu=\infty} |\,H_\nu\,| = M$$

über.

In diesem Falle lässt sich zu jeder positiven Zahl ε die Zahl ν_0 so bestimmen, dass

(33) $$M - \varepsilon < |\,H_\nu\,| < M + \varepsilon,$$

ist, sobald $\nu > \nu_0$ ist. Wir nehmen an, dass $\varepsilon < \dfrac{M}{3}$ ist. Dann haben H_ν und $H_{\nu+1}$ für $\nu > \nu_0 + 1$ stets entgegengesetzte Zeichen;

denn wären sie gleichbezeichnet, so ergäbe sich aus (9) mit Rücksicht auf (7) und (33)

$$\begin{aligned}|H_{\nu+2}| &= |H_{\nu-1}| - l_{\nu-1}|H_\nu| - m_{\nu-1}|H_{\nu+1}| \\ &\leqq |H_{\nu-1}| - |H_{\nu+1}| < 2\varepsilon < M - \varepsilon,\end{aligned}$$

was mit (33) nicht verträglich ist. Mit Hilfe von (33), (10) und (11) findet man sonach für $\nu > \nu_0 + 1$

$$\begin{aligned}M - \varepsilon < |H_{\nu+2}| &= -\frac{1}{\beta_\nu}|H_\nu| + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}|H_{\nu+1}| \\ &< -\frac{1}{\beta_\nu}(M-\varepsilon) + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}(M+\varepsilon) \\ &< \left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta_\nu}\right)M + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

d. h.

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta_\nu} > 1 - \frac{3\varepsilon}{M}.$$

Hieraus folgt wegen (11)

$$\beta_\nu > \frac{M}{3\varepsilon}, \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} > 1 - \frac{3\varepsilon}{M}$$

und dann weiter wegen (3)

$$m_\nu > \frac{M}{3\varepsilon} - 1, \quad \frac{l_\nu + 1}{m_\nu} > 1 - \frac{3\varepsilon}{M}.$$

Weil ε beliebig klein gewählt werden darf und $l_\nu \leqq m_\nu$ ist, so besagen die letzten Beziehungen, dass

(34) $$\lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{l_\nu}{m_\nu} = 1$$

ist.

Nach (32) und (34) liegt also jetzt der Fall 1° des Satzes II vor. Da es keine anderen Möglichkeiten als die behandelten gibt, so ist der Satz II vollständig bewiesen.

EIN SATZ ÜBER DIE FUCHSSCHEN GRUPPEN UND SEINE ANWENDUNG IN DER FUNKTIONENTHEORIE

Von

P. J. MYRBERG

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A.-G. SANA

Einleitung.

1. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, für gewisse fuchssche Gruppen einen mengentheoretischen Satz aufzustellen, der sowohl an sich als wegen seiner Anwendung in der Funktionentheorie bemerkenswert ist. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung gewisser Resultate, die wir in einer früheren Abhandlung[1]) mit Hilfe von Kettenbrüchen für die Modulgruppe gewonnen haben.

Es sei Γ eine fuchssche Gruppe, d. i. eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

welche das Innere des Einheitskreises

$$H: \qquad |z| = 1$$

invariant lassen. Wir nehmen an, dass der Hauptkreis H zugleich ein Grenzkreis der Gruppe ist. Als Fundamentalbereich von Γ kann dann ein Kreisbogenpolygon B_0 gewählt werden, dessen Begrenzung aus einer geraden Anzahl zu H orthogonaler Kreisbogen besteht, die paarweise durch die endlich vielen erzeugenden Substitutionen der Gruppe einander zugeordnet sind. Indem man auf B_0 die Gesamtheit der Substitutionen von Γ anwendet, wird eine unendliche Anzahl neben einander gelagerter Polygone erhalten, die das Innere von H einfach und lückenlos bedecken. Die betreffenden Polygone haben jeden Punkt von H zur Häufungsstelle

[1]) MYRBERG, P. J. *Einige Anwendungen der Kettenbrüche in der Theorie der binären quadratischen Formen und der elliptischen Modulfunktionen* (Annales academiae scientiarum fennicae, A.XXIII (1924)). Vgl. auch unsere Noten in den Comptes rendus, tome 178, S. 370 und S. 1785.

und ihre Dimensionen konvergieren gegen Null bei unbegrenzter Annäherung an den Hauptkreis.

2. Wir ziehen jetzt von irgend einem im Inneren von H liegenden Punkt eine Linie L_ω nach dem auf H gelegenen Punkt ω. Im allgemeinen wird diese Linie von unendlich vielen Polygonen des Netzes geschnitten, indem eine Ausnahme nur dann stattfinden kann, wenn ω der möglicherweise vorhandenen abzählbaren Menge der auf H liegenden „parabolischen" Spitzen der Polygone angehört. Wir denken uns jeden Teil von L_ω durch sein in B_0 gelegenes Bild ersetzt, wodurch ein im allgemeinen unendliches System von Kurvenbogen erhalten wird, das wir als (modulo Γ genommenen) *Rest* von L_ω bezeichnen können. Unter der *Häufungsmenge* von L_ω soll dann die Menge der Häufungspunkte des genannten Restes verstanden werden, d. i. die Menge derjenigen Punkte von B_0, in deren beliebig kleiner Umgebung unendlich viele Bogen des Restes Punkte besitzen. Der Zweck der folgenden Betrachtungen ist, Bedingungen für die extreme Möglichkeit aufzustellen, dass jene Häufungsmenge mit dem Bereich B_0 identisch sei. Dann hat offenbar die Linie L_ω die ausgezeichnete Eigenschaft, dass ihre Bildkurven durch die verschiedenen Substitutionen der Gruppe Γ im Innern des Hauptkreises überall dicht liegen.

3. Wir werden unsere Aufgabe zuerst für die Modulgruppe lösen, wobei wir in der Lage sind, von der Theorie der Kettenbrüche Gebrauch zu machen. Eine Antwort von sehr grosser Allgemeinheit wird von unserem Hauptsatz gegeben, *wonach es auf dem Hauptkreise H (= die reelle Achse) eine Einsmenge (d. i. eine Menge, deren komplementare Menge das lineare Mass Null hat) gibt von der folgenden Art: jede reguläre Kurve, welche in irgend einem Punkt jener Menge den Hauptkreis unter einem nichtverschwindenden Winkel schneidet, hat die maximale Häufungsmenge, die identisch mit dem ganzen Bereich B_0 ist.*

Unser Satz führt zunächst zu interessanten funktionentheoretischen Folgerungen.

Es sei $f(z)$ eine beliebige automorphe Funktion der Modulgruppe, z. B. die wohlbekannte Modulfunktion $I(z)$. Bemerkt man, dass der Wertvorrat von $f(z)$ auf L_ω identisch mit ihrem Wertvorrat auf dem Rest von L_ω ist, so sieht man ein, dass die zur Häufungsmenge von L_ω gehörigen Werte von $f(z)$ identisch mit denjenigen Werten sind, welche $f(z)$ auf L_ω approximiert. *Wenn also L_ω eine Kurve mit maximaler Häufungsmenge ist, approximiert $f(z)$ auf derselben jeden komplexen Wert.*

Speziell auf Orthogonalkreise von H angewandt führt unser Hauptsatz zu einem Resultat, welches in gewissem Sinne für die Modulgruppe dasselbe leistet, wie der bekannte Kroneckersche Approximationssatz für die doppelperiodischen Gruppen. Ein Unterschied findet sich jedoch in dem Umstande, dass die komplementare Nullmenge der genannten Einsmenge hier nichtabzählbar ist, während die entsprechende Menge bei Kronecker stets eine abzählbare Menge ist.

4. Die obigen Resultate werden, in einer unwesentlich beschränkten Form, im zweiten Kapitel für eine Klasse allgemeinerer fuchsschen Gruppen bewiesen, nämlich für alle diejenigen Gruppen, deren Fundamentalbereich ganz innerhalb des Hauptkreises liegt und also nur nichtverschwindende Winkel hat. Zu den genannten Gruppen gehören u. a. die Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen, welche in der Topologie eine wichtige Rolle spielen. Es mag hier nur erwähnt werden, dass unser Hauptsatz unmittelbar zu einer Verschärfung eines gewissen von J. Nielsen[1]) herrührenden Satzes führt, wenn man die Orthogonalkreise von H, die Geraden der Lobatscheffskischen Geometrie, als Repräsentanten der geodetischen Linien der zugehörigen geschlossenen Flächen wählt. Unser Resultat kann dann so formuliert werden, *dass fast alle geodetischen Linien unbegrenzt auf der betreffenden geschlossenen Fläche fortgesetzt jedem Punkt der Fläche*

[1]) Nielsen, J. *Zur Topologie der geschlossenen Flächen* (Vortrag, gehalten auf dem sechsten skandinavischen Mathematikerkongress zu Kopenhagen, 1925).

beliebig nahe kommen, während bisher dasselbe nur für eine Mannigfaltigkeit überall dicht liegender geodetischer Linien bewiesen worden ist.

5. Es ist natürlich zu erwarten, dass man aus den für die Modulfunktion (und für allgemeinere fuchssche Funktionen) bewiesenen Sätzen analoge Resultate für allgemeinere analytische Funktionen mit singulären Linien erhält, wenn man aus der inversen polymorphen Funktion der Modulfunktion und gewissen Bedingungen genügenden analytischen Funktionen eindeutige Funktionen in ähnlicher Weise bildet, wie im klassischen Beweis des Picardschen Satzes. Einige hierher gehörige Resultate werden im Kapitel III dargestellt. Unter anderem wird dort eine allgemeine Methode zur impliziten Konstruktion analytischer Funktionen gegeben, welche die oben bei der Modulfunktion gefundene Eigenschaft besitzen. Unsere betreffenden Sätze gehören zu den wenigen Sätzen der Funktionentheorie, welche sich auf das Verhalten analytischer Funktionen hinsichtlich ihrer Approximationswerte auf linearen Punktmengen beziehen, während gewöhnlich die Eigenschaften analytischer Funktionen in zweidimensionalen Gebieten untersucht werden [1]).

6. Weil im Folgenden einigermassen von der nichteuklidischen Massbestimmung Gebrauch gemacht wird, wollen hier kurz daran erinnern, um unsere Betrachtungen später nicht unterbrechen zu müssen.

Für die allgemeinste lineare Transformation (1), welche den Einheitskreis in sich selbst überführt, hat man den Ausdruck

$$Z' = \frac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta} \qquad \delta\bar{\delta} - \gamma\bar{\gamma} = 1, \tag{2}$$

wo $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ die konjugierten Zahlen von γ und δ sind. Hieraus folgt

[1]) Vgl. z. B. Borel, É. *Sur l'indétermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier essentiel* (Comptes rendus, tome 155 (1912), S. 201).

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}$$

und

$$1 - |z'|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|\gamma z + \delta|^2}.$$

Mithin ist der Ausdruck

(3) $$\frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

eine Invariante der Transformation (2). Man hat in (3) den Ausdruck für die nichteuklidische Länge eines Bogenelementes. Demgemäss wird die n. e. Länge[1]) einer endlichen Kurve L innerhalb des Kreises H durch das Integral

$$\int_L \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

gegeben.

[1]) Die nichteuklidische Länge wird stets so verkürzt, während unter „Länge" schlechthin stets die euklidische Länge verstanden wird.

I. Die Modulgruppe.

7. Es sei Γ die bekannte Modulgruppe, d. i. die Gruppe der Substitutionen

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{1}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten. Bekanntlich ist dieselbe ausserhalb der reellen Achse, welche die Rolle des Haupt- und Grenzkreises spielt, eigentlich diskontinuierlich, und wenn man sich auf die obere Halbebene beschränkt, kann man als Fundamentalbereich das durch

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 \geqq 1, \tag{2}$$

wo

$$z = x + iy,$$

definierte „Dreieck" wählen, dessen Ecken in den Punkten

$$z = \infty, \ \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

liegen. Jedes transformierte Dreieck hat einen Eckpunkt auf der reellen Achse und diese Eckpunkte sind identisch mit den Punkten mit rationalen z-Koordinaten. Hieraus folgt, dass jede Kurve, welche zu einem irrationalen Punkt führt, notwendig unendlich viele Dreiecke des Netzes durchquert und also eine nicht leere Häufungsmenge besitzt.

8. Es soll zuerst die Existenz der Kurven mit maximaler Häufungsmenge in dem Falle nachgewiesen werden, dass die betref-

fenden Kurven zur reellen Achse orthogonale Halbkreise sind. Es sei K ein solcher Halbkreis mit den reellen Endpunkten

$$\omega,\ \omega'.$$

Weil äquivalente, d. h. durch die Substitutionen der Gruppe aufeinander transformierbare Kurven identische Systeme äquivalenter Kurven und somit auch identische Reste sowie Häufungsmengen besitzen, können wir bei Untersuchung der Häufungsmenge des Halbkreises K denselben durch irgend einen äquivalenten Halbkreis ersetzen. So kann man offenbar erreichen, dass ω, ω' den Bedingungen

(3) $$0 \leqq \omega < 1, \quad \omega' < 0$$

genügen werden.

Es sei nun

(4) $$\omega = [0, b_1, b_2, \cdots] = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$$

der gewöhnliche unendliche Kettenbruch der als irrational angenommenen Zahl ω, wo also

(5) $$b_1, b_2, b_3 \cdots$$

positive ganze Zahlen bezeichnen. Wir definieren für jedes n die linearen Substitutionen

(6) $$T_n(z) = k_n + (-1)^n [0, b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1, -z],$$

wo die k_n unbestimmte ganze Zahlen bezeichnen. Man findet leicht, dass (6) Modulsubstitutionen sind und dass

(7) $$T_n^{-1}(\infty) = [0, b_1, b_2, \cdots, b_n].$$

Durch (6) wird K auf einen orthogonalen Halbkreis abgebildet, dessen Endpunkte in den Punkten

(8) $$\begin{aligned} T_n(\omega) &= k_n + (-1)^{n+1} [b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots] \\ T_n(\omega') &= k_n + (-1)^n [0, b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1, -\omega'] \end{aligned}$$

liegen.

9. Wir ziehen jetzt die Menge A derjenigen Punkte des Intervalles $(0, 1)$ heran, in deren Kettenbruch jede endliche Kombination positiver ganzer Zahlen in der Nennerfolge (5) unendlich oft auftritt, welche Menge das lineare Mass Eins hat[1]. Wenn ω der Menge A angehört, approximieren die Zahlenpaare (8) jedes Paar reeller Zahlen, deren Differenz absolut $\geqq 1$ ist, wie unmittelbar einzusehen ist. M. a. W. haben die Transformierten von K dann jeden zur reellen Achse orthogonalen Halbkreis, dessen Diameter $\geqq 1$ ist, zum Häufungsgebilde. Insbesondere ist jeder das Fundamentaldreieck (2) schneidende Halbkreis ein Häufungsgebilde, weil der Diameter dann sogar $\geqq \sqrt{3}$ ist.

Nun sind aber mit jedem Gebilde auch ihre Transformierten vermittels der Substitutionen der Gruppe Häufungsgebilde für irgend welches System äquivalenter Mannigfaltigkeiten. Weil jeder Orthogonalkreis der reellen Achse mit solchen Orthogonalkreisen äquivalent ist, die B_0 schneiden, müssen nach dem Vorhergehenden die Transformierten von K jeden zur reellen Achse orthogonalen Halbkreis zum Häufungsgebilde haben.

Beachten wir noch, dass die Rolle der Punkte ω, ω' vertauscht werden kann, gelangen wir zum folgenden

Satz. *Die Transformierten jedes zur reellen Achse orthogonalen Kreises haben im allgemeinen jeden Orthogonalkreis zum Häufungsgebilde, indem eine Ausnahme nur dann stattfinden kann, wenn die beiden Schnittpunkte des Kreises mit der reellen Achse einer gewissen Menge M_0 vom Mass Null angehören.*

Die Menge M_0 ist dabei identisch mit der Summe der abzählbar vielen Nullmengen, die aus der komplementaren Nullmenge von A durch die Modulsubstitutionen

$$z' = z + g \qquad (g = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

erhalten werden.

Der obige Satz gilt offenbar ungeändert, wenn man die ortho-

[1]) Vgl. die S. 3 zitierte Arbeit des Verfassers, Kap. III, oder die erste der Noten in den Comptes rendus.

gonalen Kreise durch Kreise ersetzt, die die reelle Achse unter einem und demselben von Null verschiedenen Winkel schneiden.

10. Es sei jetzt L_ω eine beliebige reguläre Kurve, welche die reelle Achse in dem zu Λ gehörigen Punkt ω unter dem nichtverschwindenden Winkel φ schneidet, und es sei C_ω ein Kreisbogen mit den reellen Endpunkten ω, ω', welcher L_ω im Punkte ω berührt. Weil die Transformierten von ω, ω' jedes Paar reeller Zahlen

$$\omega_0, \omega_0'$$

approximieren, können wir, wenn

$$|\omega_0 - \omega_0'| \geqq 1$$

ist, was stets durch eine Modulsubstitution zu erreichen ist, aus der unendlichen Folge der zu ω entsprechenden Substitutionen (6) eine Teilfolge

(9) $$T_{\mu_1}, T_{\mu_2}, T_{\mu_3}, \cdots$$

wählen derart, dass die Punkte

(10) $$T_{\mu_k}(\omega), T_{\mu_k}(\omega') \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

resp. gegen die Punkte ω_0, ω_0' konvergieren.

Es sei allgemein

(11) $$T_{\mu_k}(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}$$

der Ausdruck von T_{μ_k}. Wegen der Gleichung

(12) $$T_{\mu_k}(\omega) - T_{\mu_k}(\omega') = \frac{\omega - \omega'}{\gamma_k^2\left(\omega + \frac{\delta_k}{\gamma_k}\right)\left(\omega' + \frac{\delta_k}{\gamma_k}\right)},$$

wo

$$\lim_{k \to \infty} T_{\mu_k}(\omega) = \omega_0, \quad \lim_{k \to \infty} T_{\mu_k}(\omega') = \omega_0'$$

und der Gleichung (7), woraus

$$\lim_{k \to \infty} T_{\mu_k}^{-1}(\infty) = \lim_{k \to \infty} -\frac{\delta_k}{\gamma_k} = \omega$$

erhalten wird, ergibt sich

$$\lim_{k \to \infty} | \gamma_k | = \infty .$$

Aus der Identität

$$T_{\mu_k}(z) \equiv \frac{\alpha_k}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_k^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{\delta_k}{\gamma_k}} \tag{13}$$

geht dann hervor, dass bei Ausführung der Substitutionen (9) die Punkte in jedem abgeschlossenen Bereich, der den Punkt ω nicht enthält, gleichmässig gegen den Punkt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\alpha_k}{\gamma_k} = \omega_0'$$

konvergieren.

11. Wir wählen nun auf L_ω einen Punkt P, den wir längs L_ω gegen den Punkt ω konvergieren lassen. Der n. e. Abstand des Punktes P von C_ω konvergiert dann gegen Null. Wegen des obigen Resultats folgt daraus, dass die Häufungsgebilde der Kurven C_ω und L_ω für die Substitutionenfolge (9) miteinander zusammenfallen und also mit demjenigen Kreisbogen identisch sind, welcher die reelle Achse in den Punkten ω_0, ω_0' unter dem Winkel φ schneidet.

Nach dem Vorhergehenden gilt der

Satz. *Die Transformierten jeder regulären Kurve, welche die reelle Achse in irgend einem der Nullmenge M_0 nicht angehörigen Punkt unter einem nichtverschwindenden Winkel schneidet, haben jeden die reelle Achse unter dem nämlichen Winkel schneidenden Kreisbogen zum Häufungsgebilde.*

Aus dem obigen Satz folgt insbesondere, dass die Häufungsmenge für jede reguläre Kurve, welche die reelle Achse unter einem nichtverschwindenden Winkel in irgend einem Punkt schneidet, der einer gewissen Nullmenge M_0' nicht angehört, maximal ist. Diese Menge M_0' ist dabei eine Teilmenge der oben mit M_0 bezeichneten Nullmenge. Es soll noch gezeigt werden, dass die Menge M_0' nichtabzählbar ist.

12. Wir betrachten zu diesem Zweck die Gesamtheit der reellen Zahlen ω des Intervalles $(0 < \omega < 1)$, für welche die Nenner des Kettenbruchs nur die Werte 1 und 2 annehmen. Ihre Menge m, die äquivalent mit der Menge aller dyadischen Dezimalbrüche ist, hat die Mächtigkeit des Kontinuums und ist also nichtabzählbar. Wir behaupten, dass m eine Teilmenge von M_0' ist.

Wir nehmen zum Beweis indirekt an, dass es eine Kurve mit maximaler Häufungsmenge gibt, welche die reelle Achse in dem zu m gehörigen Punkt ω etwa rechtwinklig schneidet. Wir können dann eine unendliche Folge von Modulsubstitutionen

$$S_k = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14}$$

wählen derart, dass die vermittels derselben erhaltenen Transformierten der gegebenen Kurve eine gewisse zur imaginären Achse parallele Gerade zum Häufungsgebilde haben.

Nun schreiben wir die Formel

$$S_n(\omega) - S_n(\omega') = \frac{\omega - \omega'}{\gamma_n^2 \left(\omega + \frac{\delta_n}{\gamma_n}\right)\left(\omega' + \frac{\delta_n}{\gamma_n}\right)}, \tag{15}$$

wo ω' ein beliebiger von ω verschiedener reeller Punkt ist. Weil die Folge (14) offenbar unendlich viele Substitutionen enthält, die nicht von der Form $z' = z + g$ sind, können wir, indem wir jene Folge durch eine Teilfolge ersetzen, erreichen, dass für jedes n

$$|\gamma_n| \geqq 1$$

ist. Wegen

$$\lim_{n \to \infty} |S_n(\omega) - S_n(\omega')| = \infty \tag{16}$$

und

$$\lim_{n \to \infty} - \frac{\delta_n}{\gamma_n} = \omega$$

folgt dann aus (15)

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n^2 \left(\omega + \frac{\delta_n}{\gamma_n}\right) = 0.$$

Hieraus folgt nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Kettenbrüche, dass die rationalen Zahlen

$$(17) \qquad S_n^{-1}(\infty) = -\frac{\delta_n}{\gamma_n}$$

von einer gewissen Stelle n_0 ab Näherungsbrüche des Kettenbruches von ω sind. Der Vergleich von (7) und (17) zeigt ferner, dass die Reihe (14) für $n \geqq n_0$ mit der Reihe der Substitutionen (6) identisch ist, wenn die Zahlen $\varkappa_n$ geeignet gewählt werden. Nach (8) ist aber

$$|T_n(\omega) - T_n(\omega')| = [b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots] + [0, b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1, -\omega'],$$

deren rechte Seite < 3 ist, was mit (16) im Widerspruch steht. Somit muss m eine Teilmenge von M_0' sein. Diese letztere Menge ist daher wie m nichtabzählbar, w. z. b. w.

13. Zum Abschluss bemerken wir, dass wenn die obere Halbebene in bekannter Weise durch eine lineare Transformation auf das Innere des Einheitskreises abgebildet wird, die Modulgruppe in eine fuchssche Gruppe übergeht, für welche der Einheitskreis H ein Haupt- und Grenzkreis ist. Dabei gehen die Mengen M_0 und M_0' in gewisse auf H gelegene Punktmengen vom Mass Null über. Es seien M_1 bzw. M_1' ihre komplementaren Einsmengen, wobei M_1 eine Teilmenge von M_1' ist. Unser obiger Satz führt dann zum folgenden Satz, zum Hauptsatz der Modulgruppe.

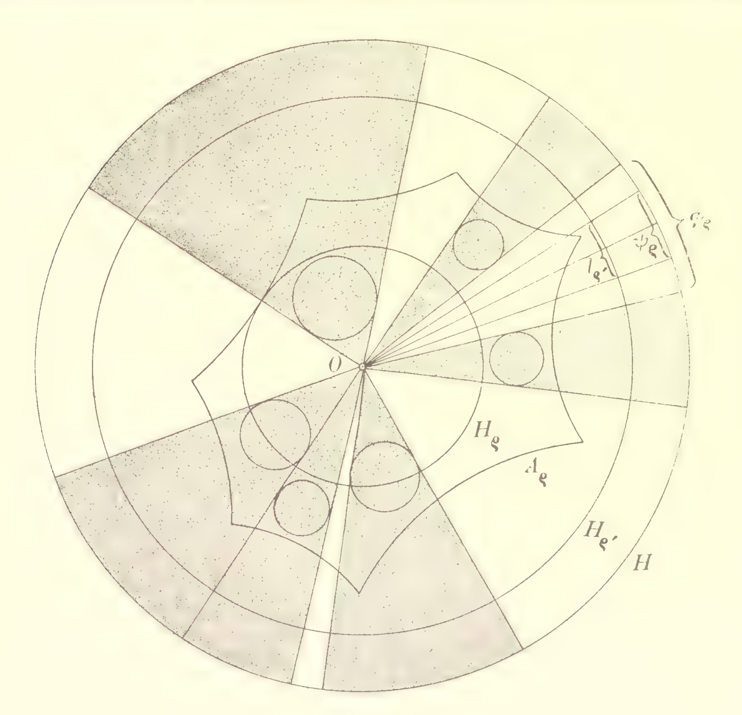
Hauptsatz. *Jede reguläre Kurve L_ω, welche H in irgend einem zur Einsmenge M_1' gehörigen Punkt unter einem nichtverschwindenden Winkel φ schneidet, hat die maximale Häufungsmenge, und auf derselben approximiert die transformierte Modulfunktion jeden komplexen Wert.*

Wenn der Endpunkt sogar zur Einsmenge M_1 gehört, haben die Transformierten der gegebenen Kurve jeden Kreisbogen, der H unter dem Winkel φ schneidet, zum Häufungsgebilde.

II. Die fuchsschen Gruppen.

14. Dem in der Einleitung aufgestellten Plan gemäss wollen wir jetzt unseren Hauptsatz für diejenigen fuchsschen Gruppen herleiten, die ein ganz innerhalb des Hauptkreises liegendes Kreisbogenpolygon zum Fundamentalbereich haben.

Indem wir mit dem Fall beginnen, dass die Linien L_ω mit den Radien des Hauptkreises H zusammenfallen, soll im Folgenden nachgewiesen werden, dass das (in der Länge der Peripherie von H als Einheit gemessene) Mass derjenigen Punkte ω, für wel-



Figur 1.

che die Häufungsmenge des zugehörigen Radius identisch mit dem ganzen Fundamentalbereich B_0 ist, gleich Eins ist.

Wir wählen irgend wo im Innern von B_0 einen Kreis $\varkappa_0$ und wir bezeichnen mit

$$\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \tag{1}$$

ihre Transformierten vermittels der Substitutionen der Gruppe Γ. Wir fassen in der Menge $M(\varkappa)$ die Gesamtheit derjenigen Punkte ω zusammen, deren Radius irgend einen der Kreise (1) schneidet, oder, was dasselbe bedeutet, für welche der Rest des zugeordneten Radius L_ω zum Kreis $\varkappa_0$ gehörige Punkte enthält. Der Zweck der folgenden Betrachtungen ist zu zeigen, dass das Mass W der Menge $M(\varkappa)$ gleich Eins ist.

Wir ziehen den Kreis

$$H_\varrho \qquad |z| = \varrho < 1$$

und wir fassen die Gesamtheit derjenigen Polygone des Netzes zusammen, die Punkte im Innern von H_ϱ besitzen. Indem wir die möglicherweise vorhandenen inneren Randkurven des so erhaltenen Bereichs fortschaffen, erhalten wir einen von einer einzigen Randkurve begrenzten Bereich, den wir mit A_ϱ bezeichnen. (Fig. 1).

Für jeden in A_ϱ gelegenen Kreis $\varkappa_\nu$ mögen nun die beiden Tangenten vom Punkte O aus gezogen werden, wobei wir diese Tangenten bis zu ihrem Schnittpunkt mit H fortsetzen. Indem wir jeden von den Tangentenpaaren gebildeten Winkel schraffieren, erhalten wir eine endliche Anzahl Zentriwinkel von H, die abwechselnd schraffiert und unschraffiert sind. Die durch 2π dividierte Summe der schraffierten Winkel sei W_ϱ, diejenige der unschraffierten also $1 - W_\varrho$. Aus der Definition der Grösse W_ϱ folgt, dass sie eine mit ϱ wachsende positive Grösse ist, die $\leqq 1$ ist, und dass

$$\lim_{\varrho \to 1} W_\varrho = W \tag{2}$$

ist. Der zu beweisende Satz lässt sich dann geometrisch auch dahin interpretieren, dass die Summe der schraffierten Winkel für $\varrho \to 1$ gegen die ganze Kreisfläche $|z| \leqq 1$ konvergiert.

15. Wir greifen irgend einen zu ϱ gehörigen unschraffierten Zentriwinkel φ_ϱ heraus[1]), und wir konstruieren den halben Winkel

$$(3) \qquad \psi_\varrho = \frac{1}{2}\varphi_\varrho$$

mit der nämlichen Halbierungslinie. Ferner schlagen wir um den Nullpunkt als Mittelpunkt den neuen Kreis

$$H_\varrho': \qquad |z| = \varrho' > \varrho.$$

Es sei $l_{\varrho'}$ der durch ψ_ϱ aus $H_{\varrho'}$ geschnittene Bogen. Wenn $\varrho' \to 1$, so wächst offenbar der n. e. Abstand des Bogens $l_{\varrho'}$ sowohl von den Schenkeln des Winkels φ_ϱ als von der Berandung des Bereichs A_ϱ über alle Grenzen. Mithin kann ϱ' so gross gewählt werden, dass die beiden genannten n. e. Abstände, und zwar für jeden zu ϱ gehörigen unschraffierten Winkel φ_ϱ, grösser als der n. e. gemessene Diameter[2]) D von B_0 wird.

Wir konstruieren jetzt den zum obigen Wert ϱ' gehörigen Bereich $A_{\varrho'}$. Dann gibt es in jedem Winkel ψ_ϱ Punkte solcher Kreise $\varkappa_\nu$, die zu $A_{\varrho'}$, nicht aber zu A_ϱ gehören. Es sei nämlich B_ν ein Polygon, welches irgend einen Punkt P_0 von $H_{\varrho'}$ enthält, der zugleich einem beliebigen Winkel ψ_ϱ angehört, und es sei $\varkappa_\nu$ der in B_ν liegende Bildkreis von $\varkappa_0$. Nach der Definition gehört das Polygon B_ν, und somit auch der Kreis $\varkappa_\nu$, als Ganzes zum Bereich $A_{\varrho'}$. Anderseits ist der n. e. Abstand von P_0 von der Berandung von A_ϱ nach der Definition von ϱ' grösser als D. Daraus folgt, dass B_ν als Ganzes ausserhalb des Bereichs A_ϱ liegt. Ferner hat B_ν keinen Punkt mit den Schenkeln des dem Winkel ψ_ϱ entsprechenden doppelten Winkels φ_ϱ gemeinsam.

16. Wir betrachten jetzt neben den Kreisen $\varkappa_\nu$ die neuen Kreise

$$(4) \qquad K_0, K_1, K_2, \cdots,$$

die aus den um den Fundamentalbereich B_0 beschriebenen und innerhalb des Hauptkreises gelegenen Kreis K_0 durch die verschie-

[1]) Gibt es keinen solchen Winkel, so ist $W_\varrho = 1$ und also $W = 1$.

[2]) Der grösste Abstand zweier zu B_0 gehörigen Punkte.

denen Substitutionen von Γ erhalten werden. Es sei R_ν der Radius von K_ν und r_ν derjenige von $\varkappa_\nu$. Es gibt dann eine von Null verschiedene Grösse q derart, dass von ν unabhängig

(5) $$r_\nu : R_\nu > q$$

ist.

Zum Beweis dieser elementaren, für das Folgende wichtigen Ungleichung denken wir uns die Kreise $\varkappa_0$ und K_0 durch eine lineare Transformation, welche H invariant lässt, in konzentrische Lagen gebracht. Indem wir für die Kreise und ihre Radien die ursprüngliche Bezeichnung anwenden, haben wir für die Radien r_ν, R_ν der aus $\varkappa_0$ bzw. K_0 durch die Substitution

$$z' = \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu}$$

erhaltenen Kreise $\varkappa_\nu$ und K_ν die Ausdrücke

(6) $$\begin{aligned} r_\nu &= \frac{r_0}{|\gamma_\nu|^2} \cdot \frac{1}{\left|a + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|^2 - r_0^2} \\ R_\nu &= \frac{R_0}{|\gamma_\nu|^2} \cdot \frac{1}{\left|a + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|^2 - R_0^2}, \end{aligned}$$

wo a der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise $\varkappa_0$ und K_0 ist. Beachtet man nun, dass der Punkt $-\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}$ ausserhalb des Hauptkreises liegt und dass somit

$$\left|a + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| > \Delta,$$

wo Δ den kürzesten Abstand des Punktes a von H bezeichnet, so ergibt sich aus (6) die Ungleichung

$$\frac{r_\nu}{R_\nu} > \frac{\Delta^2 - R_0^2}{\Delta^2 - r_0^2},$$

wo rechts eine von ν unabhängige Grösse vorkommt, die > 0 ist, weil $\Delta > R_0$ ist, w. z. b. w.

Wir denken uns jetzt die Ungleichung (5) für jede Substitution aufgeschrieben, deren zugeordnetes Polygon B_λ zwischen den Begrenzungskurven der Bereiche A_ϱ und $A_{\varrho'}$ liegt und zugleich Punkte der Kreisbogen $l_{\varrho'}$, also zu den Winkeln ψ_ϱ gehörige Punkte des Kreises $H_{\varrho'}$ enthält. Durch Summierung der Zähler sowie der Nenner aller betreffenden Ungleichungen gelangen wir zur Ungleichung

(7) $$\sum r_\nu : \sum R_\nu > q.$$

Es ist unser nächstes Ziel, eine gewisse untere bzw. obere Grenze für den Nenner bzw. Zähler der linken Seite von (7) zu geben.

17. Wir bemerken zunächst, dass die in der Summe

(8) $$\sum R_\nu$$

beteiligten Kreise K_ν sämtliche Punkte der Kreisbogen $l_{\varrho'}$ enthalten, weil alle Punkte dieser Bogen schon den Polygonen B_λ und daher auch den um dieselben beschriebenen Kreisen K_λ angehören. Daraus folgt aber leicht, dass

$$2\sum R_\nu > (1-\varepsilon_\varrho)\sum l_{\varrho'},$$

wo ε_ϱ eine für $\varrho \to 1$ gegen Null konvergierende Grösse ist. Weil aber nach der Definition

$$\sum l_{\varrho'} = \varrho' \sum \psi_\varrho = \frac{\varrho'}{2}\sum \varphi_\varrho = \frac{\varrho'}{2}(1-W_\varrho),$$

so ist

(9) $$2\sum R_\nu > \frac{1-\varepsilon_\varrho}{2}\,\varrho'(1-W_\varrho).$$

Um die Summe

(10) $$\sum r_\nu$$

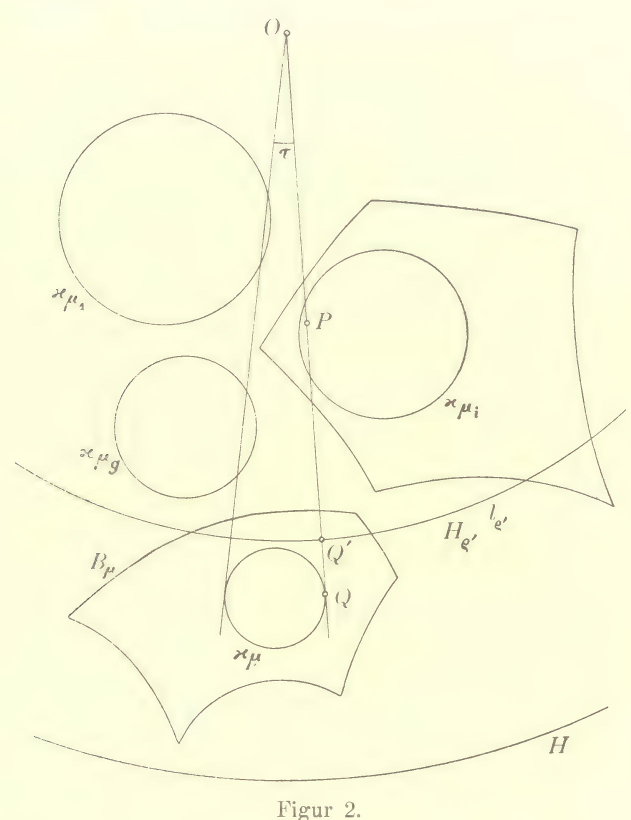
in der linken Seite von (7) von oben abzuschätzen, bilden wir diejenige Teilsumme derselben

(11) $$\sum{}' r_\mu,$$

deren zugeordnete Kreise

(12) $$\varkappa_1', \varkappa_2', \varkappa_3', \cdots$$

unter den in der Summe (10) beteiligten Kreisen $\varkappa_\nu$ so erhalten werden, dass wir unter allen Kreisen, die von einem und demselben Radius von H geschnitten werden, nur den von O ausgerechnet letzten beibehalten (Fig. 2). Es sei $\varkappa'_\mu$ irgend einer der Kreise (12) und



Figur 2.

$$(13) \qquad \varkappa_{\mu_1}, \varkappa_{\mu_2}, \cdots \varkappa_{\mu_g}$$

diejenigen fortgelassenen Kreise, welche im Tangentenwinkel τ von $\varkappa_\mu$ mit der Spitze O Punkte besitzen. Wir behaupten, dass die Anzahl g der Kreise (13) eine gewisse endliche Grenze nicht überschreitet.

Es sei nämlich P ein gemeinsamer Punkt eines Kreises $\varkappa_{\mu_i}$ und eine der beiden betreffenden Tangenten von $\varkappa_\mu$, Q der zugehörige Berührungspunkt auf $\varkappa_\mu$ und Q' der Schnittpunkt jener Tangenten

mit dem Kreis $H_{\varrho'}$. Weil das den Kreis $\varkappa_{\mu_i}$ enthaltende Polygon B_{μ_i} sowohl P als nach der Definition der Summe (10) auch Punkte des Kreises $H_{\varrho'}$ enthält, muss offenbar die n. e. Länge der Strecke PQ', welche die n. e. kürzeste Entfernung des Punktes P von $H_{\varrho'}$ gibt, $\leqq D$ sein. Weil ferner die beiden konzentrischen Kreise

(14) $$|z| = OQ \text{ und } |z| = OQ' = \varrho'$$

Punkte des zu $\varkappa_\mu$ gehörigen Polygons B_μ enthalten, der erste, weil Q zu $\varkappa_\mu$ und somit auch zu B_μ gehört, und der zweite, weil B_μ wie alle an der Summe (10) beteiligten Polygone Punkte auf $H_{\varrho'}$ besitzen, so muss der n. e. Abstand der Kreise (14), d. i. die n. e. Länge des Strecke QQ', $< D$ sein. Aus dem Obigen folgt, dass

$$\overline{PQ} \leqq \overline{PQ'} + \overline{QQ'} < 2\,D,$$

wo die Strecken nichteuklidisch zu messen sind. Weil P zu $\varkappa_{\mu_i}$ und Q zu $\varkappa_\mu$ gehört, so ist der n. e. Abstand der Kreise $\varkappa_{\mu_i}$ und $\varkappa_\mu$ und somit derjenige der zugehörigen Polygone B_{μ_i} und B_μ kleiner als $2\,D$. Daraus folgt aber, dass die Anzahl g der Kreise $\varkappa_{\mu_i}$ höchstens gleich der endlichen Anzahl g_0 derjenigen Polygone B_ν ist, die im Bereich

$$|z| \leqq 2\,D$$

wenigstens teilweise gelegen sind

Weil nun die Kreise (13) mit $\varkappa_\mu$ nichteuklidisch kongruent sind und ihr Abstand von O kleiner als derjenige von $\varkappa_\mu$ ist, so werden offenbar ihre euklidisch gemessenen Radien kleiner als der euklidische Radius r_μ von $\varkappa_\mu$. Die Summe ihrer Radien genügt daher der Ungleichung

(15) $$\sum_{i=1}^{g} r_{\mu_i} < g_0\, r_\mu.$$

Indem wir diese Ungleichung für jeden Kreis $\varkappa_\mu$ der Summe (11) aufschreiben und alle so erhaltenen Ungleichungen summieren, gelangen wir zur Ungleichung

(16) $$\sum r_\nu < g_0 \sum{}' r_\mu.$$

18. Zur Abschätzung der Summe (11) denken wir uns die Punkte aller an derselben beteiligten Kreise $\varkappa'_\mu$ vom Punkte O aus auf den Kreis $H_{\varrho'}$ projiziert, wodurch auf demselben unendlich viele nebeneinander liegende Bogen erhalten werden, die also keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Jeder Bogen gehört zu einem schraffierten Winkel von $H_{\varrho'}$ und zugleich zu einem unschraffierten Winkel von H_ϱ. Die Summe der betreffenden Bogen ist demnach kleiner als

$$\varrho' (W_{\varrho'} - W_\varrho).$$

Weil nun die n. e. Entfernung der Kreise $\varkappa'_\mu$ von $H_{\varrho'}$ kleiner als D ist, wird jene Entfernung euklidisch gemessen für $\varrho \to 1$ gegen Null konvergieren, woraus man für die Summe (11) der Diameter der Kreise $\varkappa'_\mu$ die Ungleichung

$$2 \sum{}' r_\mu < (1 + \varepsilon'_\varrho)\, \varrho' \,(W_{\varrho'} - W_\varrho) \tag{17}$$

findet, wo $\lim\limits_{\varrho \to 1} \varepsilon'_\varrho = 0$. Aus (16) und (17) folgt

$$2 \sum r_\nu < g_0\, \varrho' (1 + \varepsilon'_\varrho)\, (W_{\varrho'} - W_\varrho).$$

und nachher hieraus und aus (7) und (9)

$$q < \frac{\sum r_\nu}{\sum R_\nu} < h\, \frac{W_{\varrho'} - W_\varrho}{1 - W_\varrho}, \tag{18}$$

wo

$$h = \frac{2\, g_0 (1 + \varepsilon_{\varrho'})}{1 - \varepsilon_\varrho}$$

für $\varrho \to 1$ gegen den endlichen Grenzwert $2\, g_0$ konvergiert. Weil $W_{\varrho'} - W_\varrho \to 0$ für $\varrho \to 1$, ergibt sich aus (18) schliesslich die Gleichung

$$W = \lim_{\varrho \to 1} W_\varrho = 1.$$

Der Beweis der in Nr. 14 ausgesprochenen Behauptung ist damit zum Abschluss gebracht.

19. Wir wählen nun eine gegen Null konvergierende Reihe positiver Grössen

(19) $$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$$

und wir denken uns für jedes n den Fundamentalbereich B_0 durch endlich viele ganz darin enthaltene Kreise $\varkappa$ mit den Radien (19) derart überdeckt, dass jeder innere Punkt von B_0 zu unendlich vielen verschiedenen Kreisen gehört. Nach dem Obigen ist die Menge $M(\varkappa)$ derjenigen Punkte ω, für welche der Rest des zugeordneten Radius mit irgend einem *bestimmten* jener Kreise keinen gemeinsamen Punkt hat, vom Mass Null. Weil die Menge aller Kreise $\varkappa$ abzählbar ist, so ist die Summe aller genannten, zu den verschiedenen Kreisen $\varkappa$ gehörigen Nullmengen $M(\varkappa)$ eine Nullmenge. Ihre komplementare Menge E, welche offenbar die Menge derjenigen Punkte ω ist, deren Radius $O\,\omega$ die maximale Häufungsmenge besitzt, ist also eine Einsmenge.

Wir haben uns im Vorhergehenden auf die Betrachtung der radialen Wege beschränkt. Wie in N: 10 können die obigen Ergebnisse unmittelbar auf beliebige reguläre Wege angewandt werden, die den Hauptkreis rechtwinklig schneiden. Somit erhalten wir den

Satz. *Die Transformierten jeder regulären Kurve, welche den Hauptkreis in irgend einem Punkt der Einsmenge E rechtwinklig schneidet, liegen überall dicht innerhalb des Hauptkreises.*

Die Frage, ob der obige Satz auch für Kurven mit beliebigem Schnittwinkel gilt, soll hier dahingestellt bleiben.

III. Funktionentheoretische Anwendungen.

20. Wir beginnen mit einer Anwendung der elliptischen Modulfunktion, die auf dem in Nr. 13 formulierten Hauptsatze beruht.

Es sei

$$t = f(z)$$

eine für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion, die $\neq 0$ und 1 ist und

$$\zeta = \nu(t)$$

die inverse Funktion der Modulfunktion

$$t = J(\zeta).$$

Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$\zeta = \nu(f(z)) = \varphi(z)$$

für $|z| < 1$ regulär und

$$|\varphi(z)| < 1.$$

Wir ziehen nun von einem im Innern des Kreises

$$H \qquad |\zeta| = 1$$

gelegenen Punkt P_0 eine Linie L nach dem auf der Peripherie desselben liegenden Punkt ω. Wenn der Punkt ζ sich auf L gegen ω bewegt, beschreibt der Bildpunkt der z-Ebene eine Linie L', wobei nach dem Schwarzschen Lemma $|z| \to 1$. Vorausgesetzt wird dabei, dass der Bildpunkt von P_0 fixiert wird und dass die inverse Funktion

$$z = \varphi_1(\zeta)$$

von $\varphi(z)$ auf L keinen singulären Punkt hat.

Wir behaupten, dass der Punkt z dann gegen einen bestimmten Punkt des Kreises

$$H' \qquad |z| = 1$$

konvergiert.

Hätte nämlich die Bildkurve zwei verschiedene Häufungsstellen z_1 und z_2 auf dem Kreise H', so wäre offenbar jeder Punkt auf einem der beiden Bogen des Kreises mit den Endpunkten z_1 und z_2 eine Häufungsstelle von L'. Daraus folgte aber, dass die nach dem bekannten Satz von FATOU[1]) existierenden radialen Grenzwerte von $\varphi(z)$ für alle Punkte des betreffenden Bogens gleich einer und derselben Zahl ω wären, was einem Satz von M. RIESZ[2]) widerspricht, wonach eine Funktion, für welche die FATOUsche Randfunktion in einer Menge vom positiven Mass verschwindet, identisch Null sein muss. Damit ist unsere obige Behauptung bewiesen.

Man kann ferner zeigen, dass zweien nach verschiedenen Punkten von H führenden Wegen L_1, L_2 Linien L_1', L_2' in der z-Ebene entsprechen, deren Endpunkte voneinander verschieden sind. Andernfalls würde nämlich die Funktion $\varphi(z)$ auf den Wegen L_1' und L_2' mit dem gemeinsamen auf H' liegenden Endpunkt verschiedene asymptotische Werte haben. Nach einem Satz von E. LINDELÖF[2]) würde dann die betreffende Funktion zwischen den Kurven L_1' und L_2 jeden komplexen Wert approximieren, was der Beschränktheit derselben widerspricht.

21. Um die für die Modulfunktion bewiesenen Resultate hier anwenden zu können, müssen wir unsere Funktion $f(z)$ geeigneten Bedingungen unterwerfen.

Wir nehmen an, dass das lineare Mass der asymptotischen Werte von $f(z)$ gleich Null ist. Wir betrachten dann die Funktion $z = \varphi_1(\zeta)$ auf der zugehörigen, über den Kreis $|\zeta| < 1$ verbreiteten RIEMANNschen Fläche R. Es sei $\pi(\zeta_0)$ ein Grenzpunkt von R. Der entsprechende Punkt

$$t_0 = I(\zeta_0)$$

1) Vgl. z. B. BIEBERBACH, L., *Lehrbuch der Funktionentheorie II*, Kap. III, § 7.

2) Kap. III, § 8.

3) LINDELÖF, E. *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (Acta Soc. Sc. Fennicae, tome XXXV (1908)).

ist dann ein Grenzpunkt der Riemannschen Fläche der inversen Funktion

$$z = f_1(t)$$

von $f(z)$, wobei t_0 offenbar ein asymptotischer Wert von $f(z)$ ist. Nach der Annahme ist die Menge der Punkte t_0 eine Nullmenge. Dies ist dann ersichtlich auch mit der offenen Menge der innerhalb des Kreises $|\zeta| = 1$ liegenden singulären Punkte (π) der Fall.

Wir betrachten nun die Menge derjenigen Radien, deren Endpunkt ω zu der in No. 13 definierten Einsmenge M_1' gehört und die dazu keinen singulären Punkt von R enthalten. Die Endpunkte ω der genannten Radien L bilden eine Menge $\overline{M}$ vom Mass Eins. Für die Bildkurven L' von L, welche in der z-Ebene wegen der Eindeutigkeit von $\varphi(z)$ voneinander getrennt liegen, gilt der folgende

Satz. *Die Endpunkte der Kurven L' liegen überall dicht auf dem Kreise H'.*

Wir zeigen zunächst, dass jeder Punkt z_0 des Kreises H' eine Häufungsstelle der Kurven L' ist.

Wenn z_0 keine Häufungsstelle der genannten Kurven wäre, könnten wir von dem Radius Oz_0 eine Strecke $z_0 z_1$ derart ausschneiden, dass dieselbe keinen Häufungspunkt der Kurven L' enthielte. Das Bild von $z_0 z_1$ in der ζ-Ebene könnte dann keinen Häufungspunkt der Radien der Menge $\overline{M}$ enthalten, was unmöglich ist, weil die genannten Radien im Bereich $|\zeta| < 1$ überall dicht liegen.

Wäre nun unser obiger Satz nicht richtig, so könnten wir auf dem Kreise H' einen Bogen $\varDelta$ bestimmen, der keinen Endpunkt der Kurven L' enthält. Es seien

$$z_0, z_1, z_2$$

drei Punkte von $\varDelta$, für welche die radialen Grenzwerte von $\varphi(z)$ existieren, wobei z_0 der mittlere Punkt sei. Wir wählen auf dem Radius Oz_0 eine gegen z_0 konvergierende unendliche Punktfolge

$$(1) \qquad P_1, P_2, P_3, \cdots.$$

welche den L'-Kurven

(2) $$L'_1, L'_2, L'_3 \cdots$$

angehören. Nach unserer Annahme liegen die Endpunkte dieser Kurven ausserhalb des Bogens $\varDelta$, woraus folgt, dass jede derselben entweder den Radius Oz_1 oder Oz_2 schneiden muss. Wir können nun die Punktfolge (1) derart wählen, dass sämtliche Kurven (2) z. B. den Radius Oz_1 schneiden. Dannmüssten aber die Fatouschen Grenzwerte für die Radien Oz_0 und Oz_1 miteinander übereinstimmen. Weil nun die Punkte z_0 und z_1 beliebig auf $\varDelta$ gewählt werden können, hätte die Funktion $\varphi(z)$ für jeden Punkt von $\varDelta$ denselben Grenzwert. Dies widerspricht aber dem oben zitierten Rieszschen Satz, womit unser Satz bewiesen ist.

22. Beachtet man nun, dass die Werte der Funktion $f(z)$ auf den Linien L' mit den Werten der Modulfunktion $I(\zeta)$ auf den Radien L identisch sind, und ferner, dass man die drei Ausnahmewerte 0, 1 und ∞ durch drei beliebige Grössen ersetzen kann, indem man die Funktion $f(z)$ einer linearen Transformation unterwirft, so gibt unser Hauptsatz auf die Modulgruppe angewandt unmittelbar den

Satz. *Es sei $f(z)$ eine für $|z| < 1$ meromorphe Funktion, die wenigstens drei Werte auslässt und deren asymptotische Werte eine Menge vom Mass Null bilden. Dann gibt es ein System analytischer Kurven, deren Endpunkte auf dem Kreise $|z| = 1$ eine überall dichte und nichtabzählbare Punktmenge bilden, auf denen $f(z)$ jeden komplexen Wert approximiert.*

Damit haben wir eine allgemeine Klasse analytischer Funktionen gefunden, für welche der klassische Approximationssatz von Weierstrass schon für eindimensionale analytische Mannigfaltigkeiten gilt.

In der obigen Form hat unser zuletzt aufgestellter Satz den Nachteil, dass die Wege, auf denen die betreffende Funktion $f(z)$ alle komplexen Werte approximiert, aus Kurven bestehen, die hin-

sichtlich ihrer Form von der Wahl der Funktion abhängig sind. Man kann nun hier die Frage aufstellen, inwieweit der Approximationssatz für reguläre, etwa geradlinige Wege wie bei den fuchsschen. Funktionen gelten könnte. Unsere Absicht ist, einige Ergebnisse in der fraglichen Richtung anzugeben.

23. Wenn die Menge der asymptotischen Werte von $f(z)$ sogar abzählbar ist, so sind nach dem RIESZschen Satz die radialen Grenzwerte der zusammengesetzten Funktion

$$\varphi(z) = \nu(f(z))$$

fast alle, d. h. bis auf eine Nullmenge, absolut gleich Eins. Fast allen Radien des Kreises H' entsprechen also Kurven im Bereiche $|\zeta| < 1$, deren Endpunkte auf H liegen. Dabei bilden diese Endpunkte eine Menge vom Mass Eins, wie neuerdings Herr G. HÖSSJER[1]) durch eine Verallgemeinerung des mehrfach zitierten RIESZschen Satzes gezeigt hat. Damit nun unsere für die fuchsschen Gruppen gewonnenen Resultate hier anwendbar wären, müssen jene Kurven der ζ-Ebene in ihren auf dem Kreis H liegenden Endpunkten eine bestimmte Tangente haben, die mit der Tangente von H nicht zusammenfällt. Dies ist sicher dann der Fall, wenn fast auf allen Radien des Kreises H' nicht nur die Funktion $\varphi(z)$ selbst, sondern auch ihre Ableitung $\varphi'(z)$ endliche Grenzwerte hat, welche Grenzwerte dann stets reell und positiv sind[2]). Diese letztere Eigenschaft kommt aber nicht allen Funktionen $\varphi(z)$ obiger Art zu, wie Herr MARCEL RIESZ nach einer brieflichen Mitteilung an den Verfasser gezeigt hat. Bei dieser Sachlage müssen wir uns damit begnügen, dass wir eine Methode zur impliziten Konstruktion von Funktionen $f(z)$ der gesuchten Art geben, indem wir Funktionen $\varphi(z)$, die mit ihrer Ableitung den oben genannten

---

[1]) Die betreffenden Arbeit wird demnächst in den Acta Univ. Franc.-Jos., Szeged, erscheinen.

[2]) CARATHÉODORY, C. *Über die Winkelderivierten von beschränkten Funktionen.* (Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften IV (1929). S. 39).

Bedingungen genügen, direkt bilden und die so erhaltenen Funktionen mit der Modulfunktion zusammensetzen.

24. Am einfachsten gewinnt man Funktionen $\varphi(z)$ der fraglichen Art, wenn man von einer endlichen Anzahl linearer Funktionen

$$\frac{\bar{\delta}_\nu z + \bar{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

ausgeht, welche den Kreisbereich $|z| \leqq 1$ invariant lassen und das Produkt derselben

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\bar{\delta}_\nu z + \bar{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \tag{4}$$

bildet. Die so erhaltene Funktion ist regulär für $|z| \leqq 1$ und genügt der Bedingung

$$|\varphi(z)| = 1 \quad \text{für} \quad |z| = 1.$$

Im vorliegenden Falle sind sogar alle radialen Grenzwerte der Funktion $\varphi(z)$ absolut gleich Eins und diejenigen ihrer Ableitung endlich. Wir gehen jetzt über zum Nachweis der Existenz der Funktionen $\varphi(z)$ der gesuchten Art, die über den Kreis $|z| = 1$ hinaus analytisch nicht fortsetzbar sind.

25. Zu diesem Zweck gehen wir aus von einer zunächst beliebigen, gegen Null konvergierenden Folge positiver Grössen

$$r_1, r_2, r_3, \cdots, \tag{5}$$

denen wir die komplexen Zahlen

$$c_\nu = \varrho_\nu e^{i\vartheta_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \tag{6}$$

zuordnen, wo

$$\varrho_\nu = \sqrt{1 + r_\nu^2} \tag{7}$$

und die Zahlen ϑ_ν im Intervall $(0, 2\pi)$ überall dicht liegen. Aus (7) folgt, dass die Kreise

$$|z - c_\nu| = r_\nu \tag{8}$$

zum Einheitskreis H' orthogonal sind. Nach der über die Grössen r_ν und ϑ_ν gemachten Annahme häufen sich die Kreise (8) gegen jeden Punkt von H'.

Jedem Kreis (8) ordnen wir eine lineare Funktion

(9) $$z' = -c_\nu - \frac{r_\nu^2}{z - c_\nu} = \frac{\overline{\delta_\nu} z + \overline{\gamma_\nu}}{\gamma_\nu z + \delta_\nu}, \quad (\delta_\nu \overline{\delta_\nu} - \gamma_\nu \overline{\gamma_\nu} = 1)$$

zu, wo $\gamma_\nu = \frac{1}{r_\nu}$, $\delta_\nu = -\frac{c_\nu}{r_\nu}$, und wir bilden die Reihe

(10) $$\sum \frac{1}{(\delta_\nu z + \gamma_\nu)^2} = \sum \frac{r_\nu'^2}{(z - d_\nu)^2},$$

wo

$$r_\nu' = \frac{r_\nu}{\varrho_\nu} e^{i\vartheta_\nu},\ d_\nu = c_\nu - \frac{r_\nu^2}{c_\nu} = \frac{1}{c_\nu}.$$

Um die Konvergenz der Reihe (10) zu untersuchen, bemerken wir zunächst, dass diese Reihe wegen

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{r_\nu'}{r_\nu} \right| = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\varrho_\nu} = 1$$

sicher absolut konvergiert, wenn dies mit der Reihe

(11) $$\sum \frac{r_\nu^2}{(z - d_\nu)^2}$$

der Fall ist.

Nun haben die Punkte

(12) $$d_1, d_2, d_3, \cdots$$

als Häufungsstellen diejenigen der Punkte c_ν, also die Gesamtheit der Punkte von H'. Wenn

(13) $$\sum r_\nu^2$$

eine konvergente Reihe ist, so konvergiert auch die Reihe (11) und daher auch die Reihe (10) nach Fortlassen von endlich vielen Gliedern absolut und gleichmässig in jedem innerhalb des Kreises H' gelegenen Bereich.

26. Wir behaupten ferner, dass die Reihe (11) auf allen Radien von H', deren Endpunkte einer gewissen Nullmenge nicht ange-

hören, absolut und gleichmässig konvergiert, wenn die Folge (5) hinreichend schnell konvergent ist.

Wir wählen zu diesem Zweck auf dem Halbstrahl Oc den Punkt c'_ν derart, dass

$$|c'_\nu| = \sqrt{1 + r_\nu}$$

und wir konstruieren den zu H' orthogonalen Kreis

(14) $$|z - c'_\nu| = \sqrt{r_\nu}.$$

Weil

$$|c_\nu - c'_\nu| = |c'_\nu| - |c_\nu| = \sqrt{1 + r_\nu} - \sqrt{1 + r_\nu^2} < \frac{1}{2}(r_\nu - r_\nu^2).$$

$$|d_\nu - c_\nu| < r_\nu^2$$

so ist für jeden ausserhalb des Kreises (14) gelegenen Punkt z

$$|z - d_\nu| > \sqrt{r_\nu} - \frac{1}{2}(r_\nu - r_\nu^2) - r_\nu^2 > \sqrt{r_\nu} - r_\nu$$

und daher

(15) $$\frac{r_\nu^2}{|z - d_\nu|^2} < \frac{r_\nu}{(1 - \sqrt{r_\nu})^2}.$$

Wir wählen nun die Grössen (5) so, dass die Reihe

(16) $$\sum \sqrt{r_\nu}$$

konvergiert. Dies ist dann auch mit der Reihe

$$2 \sum \operatorname{arctg} \sqrt{r_\nu}$$

der Fall, die offenbar gleich der Summe der aus H' durch die Kreise (14) geschnittenen Bogen ist. Die Menge derjenigen Punkte von H', die entweder unendlich vielen Kreisen (14) oder irgend einem der durch die Punkte d_ν gehenden Radien angehören, ist dann ersichtlich vom Mass Null. Die komplementare Einsmenge derselben sei E'. Jeder Radius von H', dessen Endpunkt zu E' gehört, schneidet dann nur endlich viele Kreise (14) und enthält keinen Punkt d_ν. Daher gilt von einer endlichen Stelle ν_0 ab für die Punkte eines beliebigen Radius der Menge E' (sogar für den betreffenden unendlichen Halbstrahl) gleichmässig die Ungleichung (15). Weil

die $\nu_0 - 1$ ersten Glieder der Reihe (11) auf dem Radius endlich bleiben, kann man aus (15) wegen der Konvergenz der Reihe

$$\sum \frac{r_\nu}{(1-\sqrt{r_\nu})^2}$$

den Schluss ziehen, dass die Reihe (11) auf jedem Radius der Menge E' absolut und gleichmässig konvergiert. Dies ist dann auch mit der Reihe (10) der Fall.

Nun ist

$$\left|\frac{\delta_\nu z + \bar{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \bar{\delta}_\nu}\right| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1,$$

woraus folgt, dass die obigen Ergebnisse auch für die Reihe

$$(17)\quad \psi(z) = \sum \frac{1}{(\delta_\nu z + \bar{\gamma}_\nu)(\gamma_\nu z + \bar{\delta}_\nu)} = \sum \left\{ \frac{1}{z + \frac{\bar{\gamma}_\nu}{\delta_\nu}} - \frac{1}{z + \frac{\bar{\delta}_\nu}{\gamma_\nu}} \right\}$$

gelten. Diese Reihe definiert also eine für $|z| < 1$ meromorphe Funktion, die auf allen Radien der Menge E' beschränkt bleibt.

27. Wir bilden nun die Funktion

$$(18)\quad \varphi_0(z) = e^{\int\limits_{z_0}^{z} \psi(z)\, dz},$$

wo z_0 irgend ein von den Punkten $-\frac{\bar{\gamma}_\nu}{\delta_\nu}$ verschiedener Punkt im Innern des Einheitskreises ist. Aus (17) ergibt sich für (18) der Ausdruck

$$(19)\quad \varphi_0(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{\delta_\nu z + \bar{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \bar{\delta}_\nu} : \frac{\delta_\nu z_0 + \bar{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z_0 + \bar{\delta}_\nu} \right].$$

Betrachten wir nun das unendliche Produkt

$$(20)\quad \prod_{\nu=1}^{\infty} |S_\nu(z)|,$$

wo

$$S_\nu(z) = \frac{\overline{\delta}_\nu z + \overline{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu}.$$

Wegen der Identität

$$\frac{1}{|\gamma_\nu z + \delta_\nu|^2} = \left|\frac{d S_\nu(z)}{dz}\right| = \frac{1 - |S_\nu(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

konvergiert die Reihe

$$\sum (1 - |S_\nu(z)|)$$

und also das Produkt (20), wenn die Reihe

$$\sum \frac{1}{|\gamma_\nu z + \delta_\nu|^2}$$

konvergent ist. Dies ist aber sicher für $|z| < 1$ der Fall, weil ihre Glieder aus der konvergenten Reihe

$$\sum \frac{1}{|\overline{\delta}_\nu z + \overline{\gamma}_\nu|^2}$$

(die Reihe (10) ist ja absolut konvergent) durch eine Multiplikation mit den Faktoren

$$\left|\frac{\overline{\delta}_\nu z + \overline{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu}\right|$$

erhalten werden, die kleiner als Eins sind. Somit hat

$$M = \prod_{\nu=1}^{\infty} |S_\nu(z_0)|$$

einen bestimmten endlichen von Null verschiedenen Wert.

Nun bilden wir die Funktion

$$\varphi(z) = M \varphi_0(z) =$$

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{\overline{\delta}_\nu z_0 + \overline{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z_0 + \delta_\nu}\right| \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{\overline{\delta}_\nu z + \overline{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} : \frac{\overline{\delta}_\nu z_0 + \overline{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z_0 + \delta_\nu}\right].$$

Nach dem Vorhergehenden ist dieselbe regulär für $|z| < 1$ und sie hat ferner die im Bereich $|z| < 1$ gelegenen Punkte

$$z = -\frac{\overline{\gamma}_\nu}{\overline{\delta}_\nu}$$

zu Nullstellen. Weil diese Punkte jeden Punkt des Kreises $|z| = 1$ zur Häufungsstelle haben, ist diese Linie eine natürliche Grenze für die betreffende Funktion.

Ferner ist

$$|\varphi(z)| = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{\overline{\delta}_\nu z + \overline{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \right| < 1$$

für $|z| < 1$. Wegen der gleichmässigen Konvergenz des Produktes (19) auf jedem Radius der Menge E' kann man schliessen, dass $\varphi(z)$ auf jedem derselben einen bestimmten Grenzwert hat, der absolut gleich Eins ist, weil

$$\left| \frac{\overline{\delta}_\nu z - \overline{\gamma}_\nu}{\gamma_\nu z - \delta_\nu} \right| = 1 \quad \text{für} \quad |z| = 1$$

ist.

Schliesslich geht aus der Formel

$$\varphi'(z) = \varphi(z)\, \psi(z)$$

hervor, dass auch die Ableitung $\varphi'(z)$ auf jedem Radius von E' einem endlichen Grenzwert zustrebt, der nach dem in No. 23 erwähnten Satz stets reell und positiv ist. Somit genügt unsere Funktion allen in No. 23 aufgestellten Bedingungen.

28. Es sei jetzt E die Menge derjenigen Punkte auf H, die den zu den Radien der Menge E' gehörigen asymptotischen Werten von $\varphi(z)$ entsprechen. Weil die Menge E nach dem Hössjerschen Satz vom Mass Eins ist, ist dies auch mit der Menge E_1 der gemeinsamen Punkte von E und der für die Modulfunktion in No. 13 eingeführten Einsmenge M_1' der Fall.

Es sei E_1' die der Menge E_1 entsprechende Teilmenge von E'. Wir behaupten, dass E_1' eine Einsmenge ist. Andernfalls würde nämlich einer Menge vom positiven Mass, der zu E_1' komplementaren Teilmenge von E', durch Vermittlung von $\varphi(z)$ eine Nullmenge, nämlich die zu E_1 komplementare Teilmenge von E, zuge-

ordnet. Dies widerspricht aber einer kürzlich von R. Nevanlinna[1] gegebenen Verallgemeinerung des Hössjerschen Satzes, wonach jeder Teilmenge von E durch $\varphi(z)$ eine Teilmenge von E von mindestens gleichgrossem Mass zugeordnet wird, wenn $\varphi(0) = 0$, was vermittels einer linearen Transformation stets zu erreichen ist.

Durch das Obige ist zunächst gezeigt worden, dass den zu den Punkten der Einsmenge E_1 gehörigen Radien in der ζ-Ebene Kurven entsprechen, die den betreffenden Einheitskreis H in den zur Einsmenge M_1 der Modulgruppe gehörigen Punkten rechtwinklig schneiden. Allgemeiner lässt sich in genau derselben Weise einsehen, dass jeder den Kreis H' unter einem nichtverschwindenden Winkel in irgend einem Punkt von E_1' schneidenden Kurve in der ζ-Ebene eine Kurve entspricht, welche H unter dem nämlichen Winkel in einem Punkt der Menge M_1 schneidet. Aus dem Hauptsatz in No. 13 ergibt sich dann unmittelbar der folgende

Satz. *Die zusammengesetzte Funktion*

$$I(\varphi(z))$$

approximiert auf jedem regulären Bogen, welcher den Einheitskreis in irgend einem Punkt der Einsmenge E_1' unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet, jeden komplexen Wert.

Wir haben damit eine sehr allgemeine Klasse analytischer Funktionen gefunden, bei welchen der für die fuchsschen Funktionen bewiesene Approximationssatz gültig ist.

[1] Nevanlinna, R. *Über beschränkte Funktionen* (dieser Band).

ÜBER DIE ANWENDUNG LOGARITHMISCHER MASSSTÄBE, INSBESONDERE BEI GRAPHISCHER INTEGRATION

Von

E. J. NYSTRÖM

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI-A.-G. SANA

1. Im Folgenden soll die Anwendung logarithmisch geteilter Massstäbe, eines für graphische Darstellungen wichtigen Hilfsmittels, besprochen werden.

Nach recht ausführlichen Betrachtungen über „logarithmische" und „halblogarithmische" Bilder von Funktionen im Gegensatz zu den gewöhnlichen oder „numerischen" Bildern werden wir zu der graphischen Integration übergehen, die bekanntlich ziemlich genau ausgeführt werden kann. Da die Benutzung logarithmischer Skalen gerade auf diesem Gebiet vorteilhaft ist, aber die vorhandenen Lehrbücher über graphisches Rechnen eine sehr knappe oder gar keine Anleitung dazu geben, scheint eine vollständigere Behandlung des Gegenstandes am Platze zu sein.

§ 1. Einführung logarithmischer Massstäbe.

2. Von der Möglichkeit, auf den beiden Achsen eines *Cartesischen* Koordinatensystems ungleiche Längeneinheiten zu benutzen, wird bekanntlich in ausgedehntem Masse Gebrauch gemacht. So verwendet beispielsweise der Geograph oder der Ingenieur bei den Erdprofilen im allgemeinen für die Ordinaten einen erheblich grösseren Massstab als auf der Grundlinie, wodurch oft die Höhenvariationen erst merklich werden. Nicht selten muss man bei der zeichnerischen Darstellung einer Funktion an gewissen Stellen zu einer anderen Längeneinheit übergehen, was aber für die Gesamtübersicht hinderlich sein kann.

Es gibt jedoch Fälle, in denen dieses Mittel nicht ausreicht, um das Zeichnen des Schaubildes der Funktion zu ermöglichen. Denken wir etwa an den Berliner Dollarkurs der Jahre 1919—1923.

Es gibt zur Veranschaulichung des Kurses als Funktion der Zeit t überhaupt keinen geeigneten Massstab; aus der Kurve wären die Schwankungen des Dollarpreises nicht zu beurteilen, denn welche Einheit man für die Ordinaten auch gewählt hätte, immer würden die Schwankungen der ersten oder der letzten Zeit völlig verwischt werden. Um die prozentuellen oder die *„relativen Schwankungen“* im Bilde erscheinen zu lassen — und gerade diese sind gemäss der Natur der Sache wichtig —, muss man sich eines zweckmässigen mathematischen Hilfsmittels bedienen. Man braucht hier nur die *Logarithmen* des Wechselkurses zu den in natürlichem Massstabe gemessenen Zeiten aufzutragen, um ein viel besseres Bild zu bekommen [1]). Dann erscheinen nämlich gleichgrosse prozentuelle Schwankungen im Bilde ebenso ausgeprägt, gleichgültig zu welcher Zeit und auf welchem Kursniveau sie stattgefunden haben. Die ganze Kurve kann nun in eine Figur gezeichnet werden, ohne dass diese unhandlich wird. Im Bilde braucht man die Bezifferung der t-Parallelen natürlich nicht gemäss den Logarithmen, sondern kann dieselbe gemäss den Werten der zugehörigen Numeri vornehmen.

3. Für graphische Darstellungen der eben besprochenen Art sowie für viele andere Zwecke eignen sich vorzüglich die käuflichen *„funktionalen Papiere“*, von denen wir im Folgenden zwei Sorten, das *halblogarithmische* oder das *Exponentialpapier* und das *logarithmische* oder *Potenzpapier* besprechen [2]).

Auf beiden ist eine Lineatur aus x- und y-parallelen Geraden aufgedruckt. Beim halblogarithmischen Papier (Fig. 5), das sich für die Aufgabe der vorigen Nummer am besten eignet, ist die x-Achse gleichmässig nach Millimetern geteilt, während die Ordinaten logarithmische Teilungen (Fig. 1) aufweisen. Natürlich kann

[1]) Man vergleiche die Mitteilung von v. MISES in der *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 2 (1922), S. 306—312.

[2]) Diese und eine Reihe anderer Arten werden in vorzüglicher Ausführung von der Firma CARL SCHLEICHER & SCHÜLL in Düren (Rheinland) hergestellt.

man auch das Papier um 90° drehen, die gleichmässige Teilung beim Auftragen der Ordinaten und die logarithmische für die Abszissen anwenden, wenn dies vorteilhafter ist. Beim logarithmischen Papier (Figg. 3, 4) sind beide Achsen logarithmisch geteilt.

Man braucht nicht notwendig die Begrenzungslinien des Netzes als Achsen aufzufassen, sondern kann die letzteren beliebig unter Beibehaltung ihrer Richtung verschieben, muss aber beachten, dass bei einer Verschiebung einer logarithmischen Skala die Zahlen, die seinen Punkten zugeordnet sind, mit einer von der Grösse der Verschiebung abhängigen Konstante multipliziert werden müssen.

Die Strecke zwischen den Punkten 1 und 10 (z. B. 10 oder 25 cm) wird gewöhnlich als Längeneinheit betrachtet und mit *Mb* bezeichnet[1]). Wir wollen im Folgenden durch die Schreibweise Log andeuten, dass wir gemeine oder Briggsche Logarithmen im Sinne haben, was meistens praktisch ist. Man könnte sich aber auch z. B. natürliche Logarithmen vorstellen, und zwar ohne die gedruckte Bezifferung, welche die Zahlen selbst und nicht ihre Logarithmen angibt, ändern zu müssen. Die Längeneinheit wäre in diesem Falle 0.4343 von der bei den Briggschen Logarithmen gültigen.

Beispiel. In Fig. 3 ist die Funktion $y = \frac{1}{\operatorname{Log} x}$ auf einem Stück Potenzpapier, Schleicher & Schüll Nr. 365 $\frac{1}{2}$, $Mb = 100$ Millimeter dargestellt für $2 \leqq x \leqq 10$ und $1000 \leqq x \leqq 10000$. Der untere Zug ist um die Strecke 30 cm nach rechts verschoben zu denken, wobei die Zahlen der Horizontalskala mit 10^3 multipliziert werden.

[1]) Abkürzung von „Mantissenbereich". Gelegentlich wird auch das Wort „Manteb" gebraucht.

Fig. 1.

§ 2. Über den Gebrauch funktionaler Papiere.

4. Bei der Benutzung eines funktionalen Papiers mit aufgedruckten Skalen und einem genügend dichten Netz ist das Zeichnen einer Kurve fast ebenso leicht wie auf Millimeterpapier.

Die zweckmässige Berücksichtigung der Logarithmen negativer Grössen bietet jedoch bei den zu besprechenden Darstellungen, ebenso wie beim numerischen Rechnen, einige Schwierigkeit.

Meistens wird man mit den absoluten Beträgen arbeiten, um erst nachher die richtigen Vorzeichen anzubringen. Auch kann man, wenn es sich um die Darstellung einer Funktion handelt, zu dieser eine so grosse Konstante addieren, dass sie durchweg positive Werte annimmt. Ein dritter Ausweg besteht darin, die Vorzeichen umzukehren und die Funktion durch „Spiegelbilder" zu veranschaulichen [1]).

Da es auch sonst zu weit führen würde, wenn wir hier eine vollständigere Erläuterung der genannten funktionalen Papiere geben wollten, beschränken wir uns auf die Angabe ihrer wichtigsten Eigenschaften.

5. Wir vergleichen drei liniierte Papiere, das gewöhnliche Millimeterpapier oder das *Linearpapier*, das *Exponential-* und das *Potenzpapier*, und stellen zunächst fest, welche Funktionen auf diesen als gerade Linien erscheinen.

Wir denken uns je ein Blatt der drei Papiere nebeneinander gelegt und führen auf denselben je ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, indem wir setzen

$$\xi = \operatorname{Log} x, \quad \eta = \operatorname{Log} y. \tag{1}$$

Die Koordinatensysteme sind dann bzw.

$$(x, y), \quad (x, \eta), \quad (\xi, \eta)$$

[1]) Eine ausführliche Anleitung findet man in dem Lehrbuch R. MEHMKE: *Leitfaden zum graphischen Rechnen*, 2:te Aufl., Wien und Leipzig 1924, sowie in P. SCHREIBER: *Grundzüge einer Flächen-Nomographie*, Heft I—II, Braunschweig 1921—1922.

und drei auf den Blättern gezogene beliebige Geraden haben bzw. die folgenden Gleichungen, die naturgemäss je zwei Konstanten enthalten:

(2) $$y = mx + b, \qquad \eta = mx + b, \qquad \eta = m\xi + b$$

oder

(3) $$y = mx + b, \qquad y = aq^x, \qquad y = ax^m,$$

wo zur Abkürzung

(4) $$10^b = a, \quad 10^m = q$$

gesetzt ist.

Aus (2) und (3) geht unmittelbar hervor, dass bei entsprechender Lineatur des Papiers die lineare Funktion $mx + b$, die Exponentialfunktion aq^x und die Potenzfunktion ax^m als gerade Linien abgebildet werden, welcher Umstand auch zu den oben gebrauchten Benennungen Anlass gegeben hat. Diese Funktionsformen sind solche, die bei naturwissenschaftlichen Problemen besonders häufig auftreten.

Die geometrische Bedeutung der Konstanten ist hervorzuheben. In $(3)_1$ ist m, der „*Winkelkoeffizient*" gleich der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels der Geraden gegen die x-Achse, während b das vom Ursprung aus gemessene, von der y-Achse abgeschnittene Stück bedeutet.

In $(3)_2$ steht die Basis q in einfachem, durch (4) definiertem Zusammenhang mit der Neigung der Geraden, die übrigens durch den Punkt $(x = 0, y = a)$ geht.

In $(3)_3$ endlich ist der Exponent m gleich dem Winkelkoeffizienten der Geraden, die durch den Punkt $(x = 1, y = a)$ gezogen ist.

6. Als ein Beispiel für den Gebrauch des logarithmischen Papiers erwähnen wir folgendes:

Die Tatsache, dass bei beliebig grossem m und für $a > 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^m} = \infty$$

ist, wird unmittelbar anschaulich, wenn man die Linien $y = a^x$ und $y = x^m$ logarithmisch darstellt, wobei nach $(3)_3$ und (2) die letztere

eine durch den Punkt $x = 1$, $y = 1$ gehende Gerade $\eta = m\xi$ ist, die erstere aber eine mit wachsendem x immer steiler ansteigende Exponentialkurve $\eta = \operatorname{Log} a \cdot 10^{\xi}$, welche daher jene Gerade schneiden muss.

7. Eine weitere Anwendung der funktionalen Papiere, und zwar eine der wichtigsten, betrifft die Aufsuchung unbekannter physikalischer Gesetze. Es sei y eine Funktion von x, für die eine Anzahl beobachteter Werte vorliegen möge. Markiert man nun die entsprechenden Punkte z. B. auf einem Blatt logarithmischen Papiers, so wird unmittelbar ersichtlich, ob das Gesetz $y = y(x)$ sich durch eine Potenzfunktion $(3)_3$ darstellen lässt, denn in einem solchen Falle werden die angegebenen Punkte auf einer Geraden liegen, deren Neigung den Exponenten m bestimmt. Entsprechendes gilt für das Exponentialpapier [1]). Ohne funktionales Papier zu benutzen, kann man nur durch weitläufige Rechnungen entscheiden, ob Zusammenhänge der Form $(3)_2$ oder $(3)_3$ existieren.

§ 3. **Graphische Quadratur durch Mittelwertmethoden.**

8. Die einfachste Integrationsaufgabe besteht in der Ermittelung des Wertes eines bestimmten Integrals einer gegebenen Funktion $y = f(x)$. Es wird nicht verlangt, dass die Integralkurve dargestellt werden soll, sondern es ist nur eine Zahl zu bestimmen.

Ein sehr praktisches Verfahren besteht einfach darin, aus etwa n *zweckmässig gewählten* Ordinaten das arithmetische Mittel zu nehmen und die erhaltene *„mittlere Ordinate“* mit der Länge des Integrationsintervalles zu multiplizieren. Die Punkte, in denen man diese n Ordinaten zu messen hat, um die *grösstmögliche* Näherung zu bekommen, wurden von Tschebyscheff [2]) angegeben; sie teilen das

---

[1]) Beispiele hierzu findet man u. a. in dem Werkchen P. Luckey: *Nomographie.* (Math-phys. Bibl. Bd. 59/60). Leipzig und Berlin 1927. Dort wird u. a. ein Beispiel gegeben, wo das *Stefan-Boltzmannsche Gesetz* ($m = 4$) herauskommt.

[2]) Tschebyscheff, *Journal de mathématiques* (2) 19 (1874), S. 19—34. Die „beste“ Näherung könnte übrigens auf verschiedene Weisen definiert werden.

Intervall, das wir mit einem gewöhnlichen Massstab gemessen denken, in bestimmte, ein für allemal anzugebende Verhältnisse. Es wird vielleicht angebracht sein, dieselben für einige Werte n in Form von Figuren und einer Tabelle anzugeben (Fig. 2). Ein Beispiel für die Anwendung dieser Methoden enthält Nr. 12.

Tschebyscheffsche Punkte im Intervall (-1 —— $+1$).

$n=3$

$n=4$

$n=5$

$n=6$

$n=7$

$n=9$

Fig. 2.

$n=3$	0.	± 0.7071			
$n=4$		± 0.1876,	± 0.7947		
$n=5$	0.	± 0.3745,	± 0.8325		
$n=6$		± 0.2666,	± 0.4225,	± 0.8662	
$n=7$	0,	± 0.3239,	± 0.5297,	± 0.8839	
$n=9$	0,	± 0.1679,	± 0.5288,	± 0.6010,	± 0.9116

Bei langem Integrationsintervall ist es nötig, dasselbe in Teile zu zerlegen und auf jeden Teil eine der Formeln Tschebyscheffs anzuwenden.

Man kann auch die bekannte *„Simpsonsche Regel"*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big\{[f(a)+f(b)] + 4\,[f(a+h)+f(a+3h) + \cdots + f(a+(2n-1)h)] + 2\,[f(a+2h)+f(a+4h) + \cdots + f(a+(2n-2)h)]\Big\}$$

anwenden, wobei das ganze Intervall in $2n$ gleiche Teile der Länge $\frac{b-a}{2n}=h$ zerlegt ist.[1])

9. Die in diesem Paragraphen erwähnten Methoden gelten für jede zeichnerische Darstellung der zu integrierenden Funktion.

[1]) Etwas einfacher, aber auch weniger genau, ist die *„Trapezregel"*.

Die Vorteile der Benutzung logarithmischer oder halblogarithmischer Bilder kommen aber bei der Bestimmung der Ordinaten zur Geltung. Besonders zweckmässig erweisen sich dieselben, wenn es sich um Integrale von Produkten oder Quotienten von Funktionen handelt. Soll etwa das Integral

$$\int_a^b \alpha(x)\,\beta(x)\,dx \tag{5}$$

ermittelt werden, so empfiehlt es sich, die Faktoren $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ auf Exponentialpapier darzustellen, dann durch geometrische Addition der Ordinaten der Kurven

$$\eta_1 = \operatorname{Log} \alpha(x), \quad \eta_2 = \operatorname{Log} \beta(x)$$

das Bild der Funktion $\eta = \eta_1 + \eta_2 = \operatorname{Log} \alpha(x)\,\beta(x)$ abzuleiten und wie oben beschrieben zu integrieren.

Sind mehrere Integrale der Form (5) auszuwerten, wobei der eine Faktor stets derselbe ist, tritt natürlich eine erhebliche Zeitersparnis ein.

Ohne auf Anwendungen näher einzugehen, wollen wir auf zwei Gebiete hinweisen, wo Integrale der besprochenen Art auftreten.

Das eine ist die *harmonische Analyse*, wo die *„Fourierkoeffizienten"* durch Integrale wie (5) definiert sind, in denen $\beta(x) = \sin kx$, bzw. $\beta(x) = \cos kx$ $(k = 1, 2, \cdots)$ ist und wo somit diese Kurven von der in eine Fourierreihe zu entwickelnden Funktion unabhängig sind und deswegen im voraus auf das halblogarithmische Papier gezeichnet oder gedruckt werden könnten.

Ferner gelangt man bei der Auflösung von *Integralgleichungen* nach der Methode von E. Schmidt zu einem Gleichungssystem, dessen Koeffizienten durch Auswertung von Integralen der genannten Form zu bestimmen sind.

§ 4. Über die graphische Integration.

10. Die Bestimmung der Integralfunktion einer gegebenen Funktion ist insofern eine schwierigere Aufgabe als die vorhin be-

sprochene, dass man zu ihrer Lösung eine *Integralkurve* zu zeichnen hat, während es sich oben nur um die Ermittelung eines einzigen Wertes handelte. Zwecks Ausführung der graphischen Integration pflegt man die auf Millimeterpapier gegebene Kurve durch eine aus x- und y-parallelen Strecken bestehende „Treppenlinie” zu ersetzen. Jedes horizontale Stück dieser Treppenlinie stellt dann eine konstante Funktion dar, und das Integral derselben, eine lineare Funktion, kann unmittelbar angegeben werden. Sie wird durch eine Strecke dargestellt und die Integralkurve wird daher als gebrochene Linie durch solche aufeinanderfolgende Strecken approximiert[1]).

11. Wir stellen nun eine Betrachtung darüber an, wie sich die graphische Integration auf dem Potenzpapier gestaltet. Wie bereits erwähnt, entspricht jede Gerade $\eta = m_i \xi + b_i$ auf diesem Papier einer Potenz $y = 10^{b_i} x^{m_i}$. Da sich das Integral dieser Funktion unmittelbar angeben lässt und zwar in der Form

$$(6) \qquad y = \int 10^{b_i} x^{m_i} dx = \frac{10^{b_i}}{m_i + 1} x^{m_i + 1} + \text{Const.}, \qquad (m_i \neq -1)^{2)},$$

können wir die gegebene Kurve im Integrationsintervall durch eine oder mehrere Strecken annähern und darauf die entsprechenden Stücke der Integralkurven durch Strecken darstellen. Freilich erhält man auf diese Weise keine zusammenhängende Integralkurve, denn die gezeichneten Strecken entsprechen dem Falle, dass die Konstante in (6) stets gleich Null ist, und gehören verschiedenen, nämlich den durch die Punkte $x = 1$, $y = \frac{10^{b_i}}{m_i + 1}$ gehenden Integralkurven an. Jedoch leistet eine auf solche Weise dargestellte Integralkurve für viele Anwendungen dieselben Dienste wie eine zusammenhängende.

---

[1]) Näheres hierüber findet man z. B. in A. WALTHER: *Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen I.* Berlin 1928.

[2]) Die Methode versagt, wenn m_i nahe gleich -1 ist; man muss dann in anderer Weise vorgehen (vgl. § 6).

12. Als Beispiel betrachten wir das Integral

$$\int_2^x \frac{dx}{\log \text{nat}\, x} = \text{Log}\, e \int_2^x \frac{dx}{\text{Log}\, x},$$

dessen Wert bekanntlich die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ mit einer gewissen Annäherung liefert und welches, um eine Konstante vermehrt, als *Integrallogarithmus* x bezeichnet wird.

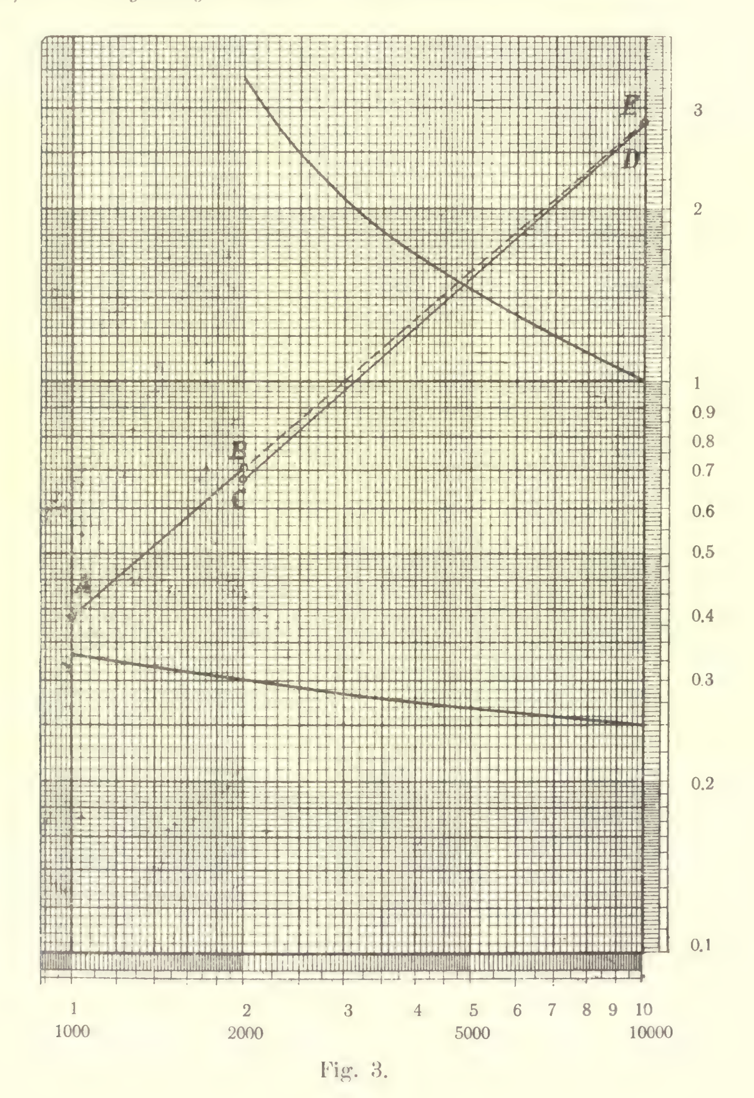


Fig. 3.

Fig. 3 zeigt die Kurve $y = \frac{1}{\operatorname{Log} x}$ (vgl. S. 5). Diese Funktion integrieren wir in der beschriebenen Weise von $x = 1000$ bis $x = 2000$ und von $x = 2000$ bis $x = 10000$ und denken uns dabei die Gerade $x = 1000$ als y-Achse. In diesen Intervallen lässt sich die Kurve sehr genau durch Strecken ersetzen. Die entsprechenden Stücke der zugehörigen Integralkurven lassen sich nach dem Vorigen konstruieren und werden durch die Strecken AB und CD (Fig. 3) dargestellt. Die Differenz der Werte y der Endordinaten der beiden Intervalle gibt mit $\operatorname{Log} e = 0.4343$ multipliziert den zugehörigen Wert des bestimmten Integrals. Diese Multiplikation kann man natürlich auch graphisch ausführen, man braucht nur die Kurve um die Strecke $|\operatorname{Log}\operatorname{Log} e| = 0.3622\ Mb$ nach unten zu verschieben. Es wurde gefunden

$$\int_{1000}^{2000} \frac{dx}{\log\operatorname{nat} x} \approx 137, \quad \int_{2000}^{10000} \frac{dx}{\log\operatorname{nat} x} \approx 925.$$

Zur Kontrolle wurden dieselben Werte nach den Methoden von Tschebyscheff unter Anwendung von 3 bzw. 5 Ordinaten bestimmt, wobei sich für das erste Integral derselbe Wert 137 ergab, für das zweite dagegen 925 bzw. 928.

13. Beim Umzeichnen auf Millimeterpapier bietet die Zusammenfügung der genannten Kurvenstücke gar keine Schwierigkeit, sie ist einfach durch vertikale Verschiebung zu erreichen. Aber auch auf dem Potenzpapier kann die Zusammenfügung leicht erfolgen. Eine blosse Verschiebung ist hier allerdings nicht mehr gestattet, doch gehen die Strecken meistens in schwach gekrümmte Bögen über, von denen man nur zwei oder drei Punkte zu bestimmen braucht, um dieselben zeichnen zu können. Diese Punkte findet man am einfachsten so, dass man an gewissen Stellen zu den Werten y_1, y_2 der Ordinaten die Sprunggrösse δ hinzufügt und die neuen Ordinaten $y_1 + \delta$, $y_2 + \delta$ aufträgt. Zu dem behandelten Beispiel zurückkehrend bemerken wir, dass der Sprung

$\delta = BC$ gleich 0.701—0.677 = 0.024 ist. Durch Hinzufügung dieser Grösse zu den Werten der Ordinaten der Strecke CD ergibt sich die Verlängerung der Integrallinie AB als ein sehr schwach gekrümmter, nach oben konvexer Kurvenbogen BE (in der Figur gestrichelt).

14. Um das logarithmische Bild einer Summe zu bekommen, für deren Glieder die logarithmischen Bilder bereits vorliegen — und darum handelt es sich jetzt, da es gilt die Sprunggrösse hinzuzufügen — kann man sich eines besonderen Instruments, des von E. A. Brauer konstruierten *„logarithmischen Zirkels“* bedienen. Allerdings muss dann die Längeneinheit gleich 50 mm sein, da solche Instrumente gegenwärtig nur entsprechend diesem Werte hergestellt werden. Etwas umständlicher, aber immerhin praktisch, ist es, zu demselben Zweck die von Mehmke [1]) eingeführte *Additions-* bzw. *Subtraktionskurve* zu benutzen, die natürlich in dem betreffenden Massstab zu zeichnen ist.

15. Es war bis jetzt von dem Potenzpapier die Rede. Genau das Entsprechende gilt aber auch für das Exponentialpapier, wo nur die Ordinaten logarithmisch geteilt sind, während für die Abszissen eine gleichmässige Teilung benutzt wird. Hier ersetzt man die zu integrierende Kurve ebenfalls durch eine gebrochene Linie, was analytisch bedeutet, dass man die gegebene Funktion $f(x)$ stückweise durch Exponentialausdrücke aq^x annähert.

Nachdem wir im folgenden Paragraphen die graphische Lösung von Differentialgleichungen besprochen haben, werden wir noch auf die Integrationsaufgabe zurückkommen.

§ 5. Über die graphische Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.

16. Eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{7}$$

[1]) Man sehe die Zeitschriften *Civilingenieur* Bd. 35 (1889), S. 620, *Zeitschr. f. Mathem. u. Physik*, Bd. 35 (1890), S. 178 oder das S. 6 angeführte Lehrbuch.

wo $f(x, y)$ eine eindeutige und stetige Funktion sein möge, ordnet jedem Punkt x, y eine bestimmte Richtung zu. Die Lösungskurven von (7) sind solche, die in jedem Punkte die vorgeschriebene Richtung haben. Die Schar derselben hängt von einem Parameter ab; man kann, um eine partikuläre Lösung zu bekommen, einen Punkt der Kurve willkürlich vorschreiben.

Um die zweifach unendliche Mannigfaltigkeit der *Linienelemente*, d. h. der Punkte (x, y) nebst den zugeordneten Richtungen y', übersehen zu können, pflegt man die Punkte gleicher Richtung durch Kurven, *Isoklinen*, zu verbinden, die gemäss der Gleichung $f(x, y) = \text{Const.}$ gezeichnet werden. Ferner zeichnet man die *Direktrix*, eine von D'OCAGNE eingeführte Kurve, nämlich $y = f(x, y)$, von der Eigenschaft, dass sie jede Isokline in einem Punkt schneidet, dessen Ordinate y gleich dem Winkelkoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ der Tangente der betreffenden Lösungskurve ist und welche also die den Isoklinen zugeordneten Richtungen zu konstruieren gestattet.

Die Lösungskurven setzt man zunächst aus Geradenstücken zusammen, die stets in den vorgeschriebenen Richtungen gezeichnet werden und deren Schnitt man etwa in die Mitte von zwei aufeinander folgenden der vorher gezeichneten Isoklinen legt [1]).

17. Wir haben nun zu untersuchen, ob und wie man die besprochene graphische Integration auch in dem Falle ausführen kann, dass man die Ordinaten logarithmisch aufträgt, mögen nun die Abszissen gleichmässig, logarithmisch oder auf andere Weise aufgetragen werden.

Die Lösungen der Differentialgleichung wird man natürlich ebenfalls in logarithmischer Darstellung bekommen.

Es sei allgemein

(8) $$x = x(\xi), \quad y = 10^{\eta},$$

(8)' $$\xi = \xi(x), \quad \eta = \text{Log}\, y,$$

---

[1]) Man sehe des Näheren und besonders betreffs der Verbesserung der Lösungen z. B. FR. A. WILLERS: *Methoden der praktischen Analysis*, Berlin und Leipzig 1928, §§ 31, 33.

woraus durch Spezialisierung der Funktion $x(\xi)$ die Formeln für das Exponential- bzw. das Potenzpapier hervorgehen.

An die Stelle von (7) tritt nun gemäss (8) die Differentialgleichung

$$(9)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{x'(\xi)}{10^{\eta}\log 10} f(x(\xi), 10^{\eta}), \quad \left(\frac{1}{\log 10} = \operatorname{Log} e = 0.4343\right).$$

Diese nimmt insbesondere im Falle der Darstellung auf Exponentialpapier die Form

$$(10)\qquad \frac{d\eta}{dx} = \frac{\operatorname{Log} e}{y} f(x, y) = \frac{\operatorname{Log} e}{10^{\eta}} f(x, 10^{\eta})$$

an, weil dann $x(\xi) \equiv \xi = x$ zu setzen ist.

Beim Gebrauch von Potenzpapier ist (vgl. (1)) $x(\xi) = 10^{\xi}$, und (9) geht dann in die Gleichung

$$(11)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{x}{y} f(x, y) = \frac{10^{\xi}}{10^{\eta}} f(10^{\xi}, 10^{\eta})$$

über.

Die zu den Differentialgleichungen (7), (10), (11) gehörigen Scharen von Isoklinen sind beziehungsweise

$$(7)'\qquad f(x, y) = \text{Const.}$$

$$(10)'\qquad \frac{f(x, y)}{y} = \text{Const. oder } \eta - \operatorname{Log} f(x, 10^{\eta}) = \text{Const.}$$

$$(11)'\qquad \frac{x}{y} f(x, y) = \text{Const. oder } \eta - \xi - \operatorname{Log} f(10^{\xi}, 10^{\eta}) = \text{Const.}$$

18. Es hängt von der Art der jeweiligen Aufgabe ab, in welcher Darstellung die Isoklinen am einfachsten und übersichtlichsten erscheinen. Jedenfalls ist es klar, dass die Einführung eines funktionalen Papiers durchaus nicht die graphische Integration erschwert. Die Gleichungen der Isoklinen sind nicht wesentlich komplizierter als in dem Falle gleichmässiger Skalen. Zu beachten ist aber, dass man durch Wahl einer geeigneten Darstellungsart erhebliche Vorteile erreichen kann. Nach MEHMKE[1]) sollte die

[1]) Loc. cit., S. 145. MEHMKE betrachtet allerdings nur den Fall der Gleichung (11).

Einführung logarithmischer Massstäbe „in weitaus den meisten Fällen" Erleichterungen mit sich bringen, und zwar so entschieden, dass man die logarithmische Darstellung auch dann einführen würde, wenn man die damit konstruierten Bilder der Lösungskurven nachher auf Millimeterpapier umzeichnen müsste[1]).

19. Wir nehmen nun als Beispiel die spezielle *Riccatische Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^m + \beta y^2 \qquad (\alpha, \beta, m \text{ Konstanten}), \tag{12}$$

die wir auf *logarithmischem Papier* integrieren wollen. Diese Differentialgleichung ist nach LIOUVILLE[2]) nur dann durch elementare Funktionen integrierbar, wenn $m = -\frac{4k}{2k \pm 1}$, wobei k eine ganze positive Zahl ist, oder im Grenzfall $k = \infty$, $m = -2$. Bei der graphischen Lösung ist es natürlich ganz unwesentlich, ob m den genannten Zahlen angehört oder nicht.

Die Schar der Isoklinen ist gemäss (11)′ durch

$$y^2 - \frac{c}{\beta} x^{-1} y + \frac{\alpha}{\beta} x^m = 0 \quad (c = \text{Const.}) \tag{13}$$

definiert und es gilt zunächst, diese Kurven zu zeichnen. Man könnte allerdings ganz willkürlich Punkte (x, y) der Ebene wählen, in diesen den Wert c bestimmen und so die erhaltenen Linienelemente zu Integralkurven verbinden. Jedoch kann man bequem auch von beliebigen Werten c ausgehen und die zugehörigen Kurven punktweise zeichnen, wobei die einer Abszisse x entsprechenden Ordinaten y aus der quadratischen Gleichung (13) zu bestimmen sind[3]). Diese Gleichung können wir schreiben

---

[1]) *Über die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen* $y' = f(x, y)$ siehe auch den mit diesen Worten betitelten Aufsatz von P. SCHREIBER in der *Zeitschr. für angewandte Math. und Mech.*, Bd. 2 (1922), S. 200—207.

[2]) LIOUVILLE, *Journal de mathématiques*, Bd. 6 (1841), S. 1—13.

[3]) Viel komplizierter wird auch nicht die Auflösung der allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung $y' = a_0(x) + a_1(x) y + a_2(x) y^2$.

$$(14) \quad y^2 - 2a(x)\,y + b(x) = 0, \quad \text{wo} \quad a(x) = \frac{c}{2\beta} x^{-1},\, b(x) = \frac{a}{\beta} x^m,$$

Natürlich kommen für uns nur die reellen Wurzeln in Betracht; ausserdem kann $a \geqq 0$ angenommen werden, wenn man nach der Auflösung die Wurzeln mit den richtigen Vorzeichen versieht, auf die man aus denjenigen von a und b schliessen kann. Die Wurzeln von (14) bzw. (13) sind dann

$$(15) \qquad |y_1| = \sqrt{|b(x)|}\, tg\, \varphi, \quad y_2 = \sqrt{|b(x)|} \cot \varphi, \qquad (y_2 > y_1),$$

wo der Hilfswinkel $\varphi \left(0 < \varphi \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ durch

$$(15)' \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \sqrt{|b(x)|} : a(x) \quad \text{oder} \quad \sin 2\varphi = \sqrt{|b(x)|} : a(x)$$

bestimmt ist, je nachdem, ob $b(x)$ negativ oder positiv ist. Diese Formeln gestatten bei Verwendung von Potenzpapier eine sehr bequeme punktweise Konstruktion der Isoklinen. Zunächst sind die Koeffizienten a und b als Funktionen von x darzustellen. Da man aber nur mit $\sqrt{|b(x)|}$ operieren wird, empfiehlt es sich, die Funktion $b(x)$ gleich mit einer Längeneinheit zu zeichnen, die die Hälfte von derjenigen des logarithmischen Papiers ist, wodurch man das logarithmische Bild der Funktion $\sqrt{|b(x)|}$ erhält. In dem vorliegenden Falle sind die logarithmischen Bilder der Funktionen $a(x)$, $b(x)$, $\sqrt{|b(x)|}$ übrigens *gerade Linien.*

Es ist gar nicht nötig, den Winkel φ selbst zu bestimmen Man zeichnet ein für allemal die Kurven

$$(16) \qquad \begin{cases} \xi = \operatorname{Log} \operatorname{tg} 2\varphi, \\ \eta = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \operatorname{Log} \sin 2\varphi, \\ \eta = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

auf Millimeterpapier, oder die Kurven

$$(16)' \qquad \begin{cases} x = \operatorname{tg} 2\varphi, \\ y = \operatorname{tg} \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sin 2\varphi, \\ y = \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

auf Potenzpapier und entnimmt aus der Figur zu gegebener Abszisse $\xi = \operatorname{Log} \frac{\sqrt{|b(x)|}}{a(x)}$ (Ordinatenunterschied der auf Potenzpapier

dargestellten Kurven für $\sqrt{|b(x)|}$ und $a(x)$) die Ordinate $\eta = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \varphi$. Diese Strecke ist gemäss (15) von dem Punkte x der Kurve $y = \sqrt{|b(x)|}$ aus vertikal nach oben und unten abzutragen, um die beiden zum Werte x gehörigen Punkte $y = y_1$ und $y = y_2$ der Isokline c zu finden. Es ergibt sich also eine *schiefe Symmetrie* in bezug auf die Linie $y = \sqrt{|b(x)|} = \sqrt{\left|\frac{a}{\beta}\right|}\, x^{\frac{m}{2}}$, die, wie gesagt, in unserem Falle eine Gerade ist. Die ganze Konstruktion erfolgt lediglich durch Abgreifen von Strecken; es brauchen keinerlei Hilfslinien gezeichnet zu werden ausser den festen und auch für ganz allgemeine Riccatische Gleichungen brauchbaren Kurven (16), bzw. (16)'.

Es zeigt sich aber, dass die Isoklinen untereinander *kongruent* sind, was natürlich das Zeichnen derselben noch wesentlich erleichtert. Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir in die Gleichung (13)

(17) $$x = p x_1, \quad y = q y_1,$$

und finden, dass wenn $q = p^{\frac{m}{2}}$ ist, nur die Konstante c sich ändert. In der logarithmischen Darstellung bedeutet aber (17) eine Verschiebung um die Strecke $\operatorname{Log} p$ in der Richtung der x-Achse und um die Strecke $\operatorname{Log} q = \frac{m}{2} \operatorname{Log} p$ in der Richtung der y-Achse. *Die Isoklinen von* (12) *gehen daher durch Verschiebung in die Richtung der* bereits genannten *Symmetriegeraden aus einander hervor* [1]).

Die Figur 4 entspricht dem Falle $a = \beta = k = 1, m = -\frac{4}{3}$, bezieht sich also auf die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{4}{3}} + y^2.$$

Die Figur zeigt in vier Mantissenfeldern eine Anzahl Isoklinen nebst Linienelementen, ihre Symmetrielinie (strichpunktiert) sowie einige Integralkurven (gestrichelt).

[1]) Auf Linearpapier dargestellt sind die Isoklinen zu einander *affin*.

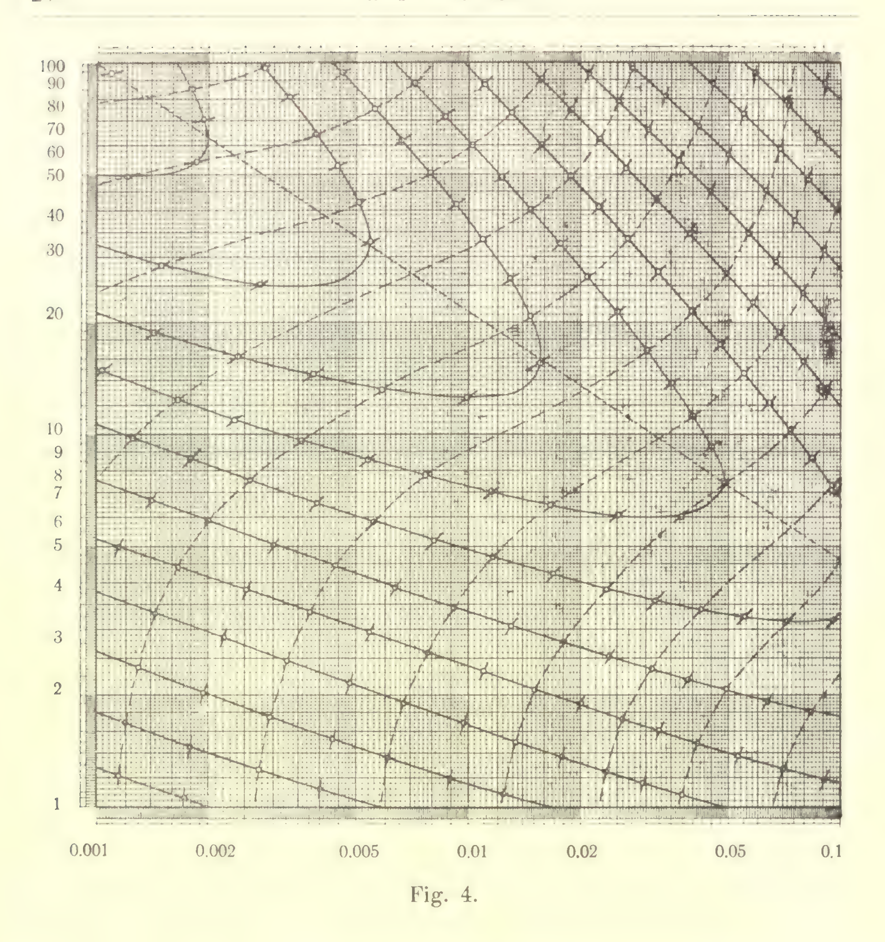


Fig. 4.

§ 6. Nochmals die graphische Integration.

20. Die Integration einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ kann als die Auflösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{18}$$

bezeichnet werden. In diesem Falle besteht *das numerische Bild* der Isoklinenschar aus den Parallelen der y-Achse, während die Direktrixkurve mit der gegebenen Kurve $y = f(x)$ zusammenfällt.

Hieraus folgt ohne weiteres, dass die Integralkurven miteinander kongruent sind und durch Verschiebung um eine der Integra-

tionskonstante entsprechende Strecke in der Richtung der y-Achse aus einer beliebigen von ihnen hervorgehen.

Bei der Benutzung funktionaler Papiere mit *logarithmisch aufgetragenen Ordinaten* können wir uns der Differentialgleichungen (9), (10) oder (11) bedienen, wo nun anzunehmen ist, dass f nur von x, also nicht von y abhängt. Die Schar der Isoklinen von (18) ist gemäss (9) allgemein durch die Gleichung

$$(19)\quad \operatorname{Log}\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{Log} x'(\xi) + \operatorname{Log} f(x(\xi)) - \eta - \operatorname{Log}\log 10 = \text{Const.}$$

$$(\operatorname{Log}\log 10 = - \operatorname{Log}\operatorname{Log} e = 0.3622)$$

definiert, woraus hervorgeht, dass die Isoklinen untereinander *kongruent* sind und durch Verschiebung in der Richtung der logarithmisch geteilten η-Achse aus einander hervorgehen[1].

Man braucht also *nur eine Isokline* zu zeichnen; wenn es sich um das Exponentialpapier handelt, liegt sogar diese bereits vor, weil dann $x'(\xi) = 1$ ist und nach (19) *eine* Isokline mit dem halblogarithmischen Bilde der zu integrierenden Funktion $f(x)$ zusammenfällt.

Im Falle des Potenzpapiers hat man, um eine Isokline zu erhalten, nach (11)′ die Funktion $x f(x)$ und im allgemeinen Falle nach (8)′ und (9) die Funktion $\frac{1}{\xi'(x)} f(x)$ auf dem betreffenden funktionalen Papier darzustellen.

Wie aus (19) hervorgeht, ist der Logarithmus des Winkelkoeffizienten der Tangente der Integralkurve gleich dem *Ordinatenunterschiede* der Integralkurve $\eta = \eta(x)$ und *einer gewissen* Isokline $\eta = \operatorname{Log} x'(\xi) + \operatorname{Log} f(x(\xi)) + \text{Const.}$ an der betreffenden Stelle gemessen.

Der Richtungswinkel der Tangente der durch P (Fig. 5) gehenden Integralkurve kann also lediglich durch Messung des Vertikalabstandes $PQ = \varrho$ von einer *beliebigen* Isokline bestimmt werden, und zwar ist diese Bestimmung leichter als die entsprechende bei

[1]) Diese Eigenschaft, die also bei einer beliebigen ξ-Skala gilt, ist von Mehmke, loc. cit. S. 143, für den Fall des Potenzpapiers erwähnt.

der gewöhnlichen graphischen Integration, wo der genannte Richtungswinkel von der *Ordinate* der Grundkurve abhängt.

21. Wir können nun ein kleines Instrument konstruieren, um das Zeichnen der Integralkurve bequem zu machen. Zu diesem

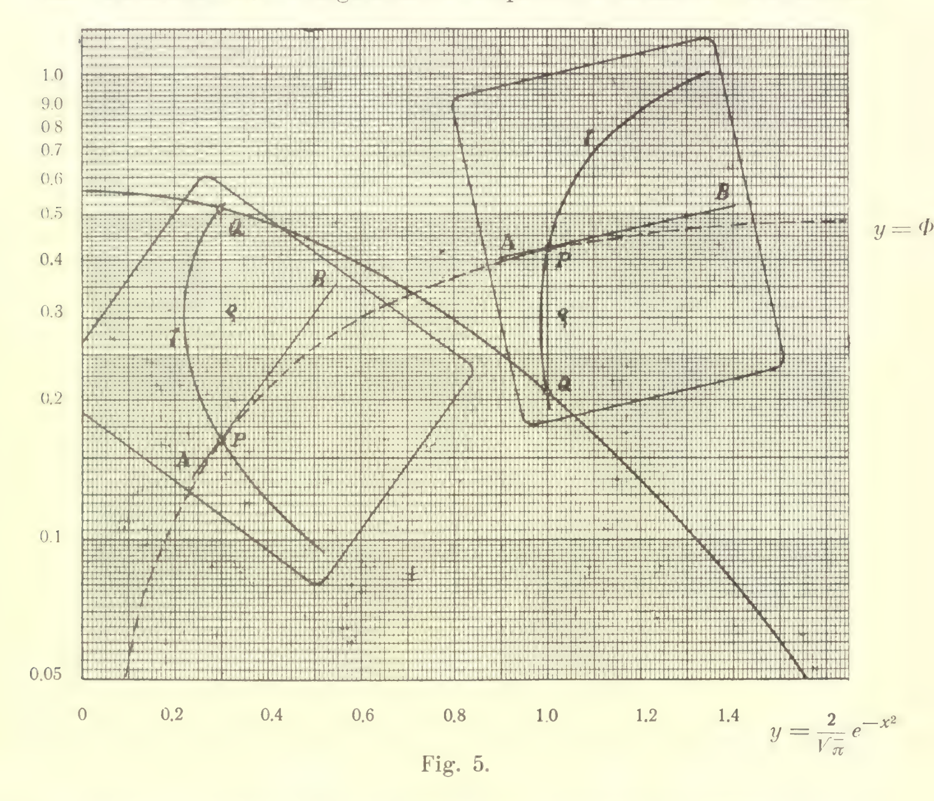


Fig. 5.

Zweck wollen wir auf ein durchsichtiges Blatt (Fig. 6) eine Kurve γ so zeichnen, dass eine feste Gerade APB auf diesem Blatte die durch P gehende Integralkurve berührt, wenn man die Punkte P zusammenfallen lässt und das Blatt um diesen Punkt dreht, bis Q auf der Kurve γ zu liegen kommt.

Wir wollen die Kurve γ so wählen, dass auch die in (19) enthaltene Konstante $\operatorname{Log} \operatorname{Log} e = -0.3622$ berücksichtigt wird, dass man also von der Isokline

$$\eta = \operatorname{Log} x'(\xi) + \operatorname{Log} f(x(\xi))$$

ausgeht, die im Falle des Exponentialpapiers mit dem Bilde der zu integrierenden Funktion identisch ist. Bedeutet ψ den Richtungswinkel der Tangente der Integralkurve, so haben wir nach (19)

$$\text{Log tg}\,\psi = \varrho - 0.3622,$$

wo ϱ den genannten Vertikalabstand bedeutet.

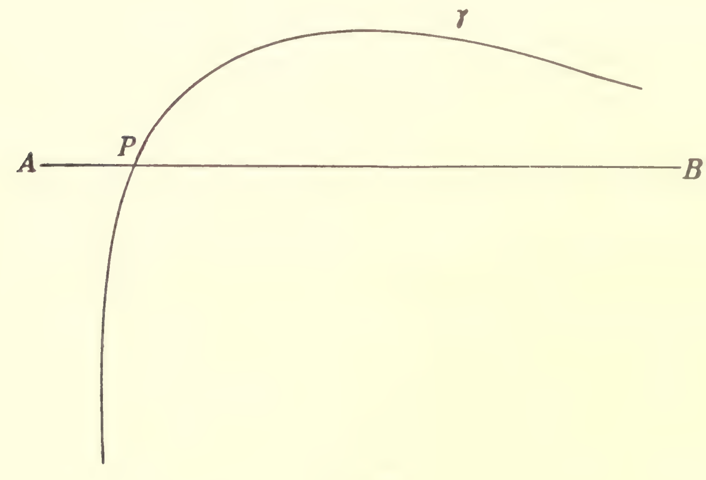


Fig. 6.

Wenn wir noch den Winkel $BPQ = \varphi = 90^\circ - \psi$ einführen, so erhalten wir die Gleichung der Kurve γ in Polarkoordinaten (ϱ, φ)

$$\varrho = -\text{Log tg}\,\varphi + 0.3622,$$

wobei die Gerade PB zur Achse genommen ist.

Man kann mit Hilfe der Kurve γ die Integralkurve durch einen beliebig gegebenen Punkt konstruieren. Da die Kurve γ durchaus nicht von der zu integrierenden Funktion abhängt und für alle Arten von funktionalen Papieren zu gebrauchen ist, wobei für die Ordinaten ein logarithmischer Massstab benutzt wird, so scheint sie ziemlich allgemeiner Anwendung fähig zu sein [1]).

[1]) Wir haben bei der Bestimmung der Hilfskurve spezielle Rücksicht auf das Exponentialpapier genommen, was uns angemessen scheint.

Wir geben daher eine für ihre genaue Konstruktion nützliche Tabelle:

φ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	250°	260°
ϱ	1.1159	0.8011	0.6008	0.4384	0.2860	0.1237	0.0767	0.3915

Die Kurve γ selbst ist in Fig. 6 abgebildet, sie besteht aus einem einzigen Zuge, geht durch den Ursprung in der Richtung $\varphi = 66^\circ\, 31.5'$ und nähert sich asymptotisch der Polarachse und dem Strahl $\varphi = 270°$.

Da man nicht immer mit derselben Längeneinheit arbeitet, wäre es angemessen, auf dasselbe Blatt eine Reihe von solchen Kurven (die natürlich unter sich *ähnlich* sind) zu zeichnen, etwa den *Mb* der verschiedenen, gedruckt vorliegenden Netze entsprechend.

Fig. 5 bezieht sich auf die Funktion $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ und deren Integralfunktion, die für $x = 0$ verschwindet und die gewöhnlich als *Gausssches Fehlerintegral* $\Phi(x)$ bezeichnet wird.

Die graphische Integration von $y = x^{-1}$, die nicht nach der Methode von Nr. 11 ausgeführt werden konnte, lässt sich mittels des jetzt angegebenen Verfahrens ohne Schwierigkeit durchführen.

22. Es wäre auch möglich, die ganze Integration *mechanisch* zu bewerkstelligen. Man muss dazu die Kurve γ durch eine gekrümmte Schiene ersetzen. Ein solcher Integraph ist immerhin einfacher als der gewöhnliche *Abdank-Coradi*sche. Derselbe ist ein Spezialfall eines von E. Pascal angegebenen Instruments [1]).

[1]) E. Pascal: *I miei Integratori*, Napoli 1914. Deutsche Übersetzung von A. Galle in der *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 1922.

LA GRAVITATION UNIVERSELLE ET SA VITESSE DE PROPAGATION

PAR

KARL F. SUNDMAN

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
Imprimerie de la société p. a. SANA

La gravitation universelle et sa vitesse de propagation.

La gravitation universelle a longtemps paru être un phénomène n'ayant aucun lien avec les autres phénomènes de la nature physique comme p. ex. la lumière et l'électricité. A un lien étroit entre la lumière et l'électricité portait à croire avant tout le fait que leurs vitesses de propagation dans le vide sont égales. Si l'on pouvait démontrer que la vitesse de propagation de la gravitation est la même que celle de la lumière, l'existence d'un lien entre la gravitation et les phénomènes electro-optiques deviendrait très probable. On sait que la théorie de la relativité générale sous certains rapports a fait entrer la gravitation universelle dans le cercle des dits phénomènes. Les recherches des astronomes sur la vitesse de la gravitation ont pourtant paru démontrer qu'elle est des millions de fois plus grande que celle de la lumière.

En examinant ces recherches de plus près, on voit cependant que les hypothèses émises relativement à l'influence d'une vitesse de la gravitation sur les mouvements des corps célestes sont bien simples et renferment plusieurs points de vue dignes d'attention mais qu'elles ne sont aucunement propres à résoudre définitivement le problème de la vitesse.

Dans ce mémoire je veux démontrer qu'on peut faire des suppositions plausibles sur la gravitation et sa manière d'exercer une action sur les corps, suppositions telles que la vitesse de la propagation des impulsions de gravitation peut être la même que la vitesse de la lumière sans qu'il en résulte des différences entre l'observation et le calcul dans les mouvements de notre système planétaire.

2. Pour le traitement du problème en question nous nous placerons dans la suite entièrement dans les principes de la mécanique classique. Nous supposons ainsi qu'il existe des axes rectangulaires fixes dans l'espace par rapport auxquels on peut déterminer les positions des corps, et un temps absolu t, qui mesure le développement des mouvements dans l'univers. Les coordonnées des corps se déterminent par un système d'équations différentielles, dans lesquelles entrent les projections sur les axes des forces de gravitation des corps du système. D'après la loi de NEWTON les forces ne dépendent à chaque instant que des positions des corps à cet instant. Si l'on se figure que la gravitation est une espèce d'état particulier ou d'impulsion, qui se meut d'un corps à l'autre et à ce dernier produit un changement de vitesse, la vitesse de cet état est d'après la loi de NEWTON infiniment grande.

En supposant que les forces se déterminent par la loi de NEWTON, l'intégration des équations différentielles du mouvement nous donne les coordonnées des corps exprimées comme fonctions du temps absolu t. Mais on trouve en sens inverse que t est une fonction des coordonnées de chacun des corps, du moins dans un intervalle suffisamment court. Il s'en suit que le temps absolu est par là défini dans les points de l'espace où les corps se trouvent.

Tant que les observations font voir que les mouvements des corps célestes se continuent suivant la loi de NEWTON et la mécanique classique on n'a aucune raison de modifier les théories sur lesquelles elles se basent. Mais s'il survient des divergences entre l'observation et la théorie on peut en chercher la cause et dans la mécanique classique et dans la loi de NEWTON.

3. On sait que LE VERRIER trouva déjà un écart de ce genre dans le mouvement moyen du périhélie de Mercure. NEWCOMB de son côté vérifia le résultat de LE VERRIER et y ajouta d'autres écarts qui sont pourtant moindres. On a cherché à rétablir l'accord de plusieurs manières. En premier lieu on supposa que l'écart était causé par les forces perturbantes des corps inconnus. Les résul-

tats ne sont pourtant pas satisfaisants à tous les points de vue. Dans ses théories des planètes inférieures Newcomb accepta l'hypothèse de M. A. Hall[1]), d'après laquelle l'exposant 2 de la distance dans la loi de Newton est remplacé par un nombre $2 + \sigma$. Newcomb trouva

$$\sigma = 0.0000001612.$$

Cette supposition ne satisfait pas parce que la valeur de σ ne peut se déduire par aucune théorie acceptable.

On a aussi essayé de conserver la formule de la grandeur de la force selon la loi de Newton, mais supposé que la gravitation se transmet avec une vitesse finie. Bien que les résultats n'aient été satisfaisants, ainsi que nous l'avons fait remarquer déjà, nous énumérerons les principales des hypothèses faites.

Laplace[2]) supposa que l'attraction est produite par l'impulsion d'un fluide sur le corps attiré. Par la vitesse de la gravitation il entend la vitesse de ce fluide, ce qui ne correspond pas à l'idée qu'on se fait d'une vitesse de la gravitation.

Lehmann-Filhés[3]) et plus complètement M. L. Becker[4]) ont traité le problème d'un autre point de vue. Ils supposent que la force qu'un corps P exerce sur un autre Π à l'instant t est déterminée d'après la loi de Newton, mais de telle manière qu'on emploie, au lieu de la position de P à l'instant t, sa position $\bar{P}$ à l'instant $\bar{t} = t - \tau$, où τ est le temps nécessaire à l'impulsion de gravitation pour se transmettre de P à Π. Dans cette hypothèse c'est avant tout le mouvement du système solaire dans l'espace qui influe sur le résultat final, qui en tout cas ne peut être accepté sans qu'on suppose que la vitesse de propagation soit extrêmement grande par rapport à celle de la lumière.

M. Anding[5]) a de son côté essayé une autre hypothèse. Il sup-

[1]) Astronomical Journal t. XIV p. 49.

[2]) Mec. cel. Tome IV p. 325, 1805.

[3]) Astr. Nachr. Tome 110, 1884.

[4]) Monthly Not. Vol. 88, 1927.

[5]) Astr. Nachr. Tome 220, p. 353, 1924.

pose en résumé que de chaque corps, p. ex. P, parte dans toutes les directions avec la vitesse c un état, qui a la propriété de donner au corps Π, qu'il franchit, une impulsion qui est dirigée vers P et dont la grandeur varie en raison inverse du carré de la distance de P à Π et directement comme $c - \frac{dr}{dt}$ c'est à dire la vitesse relative de Π par rapport à l'état en question dans la direction $P\Pi$. M. Anding fait voir que cette hypothèse donne des perturbations impossibles si l'on suppose que c est égal à la vitesse de la lumière. On doit pourtant remarquer que cette hypothèse laisse entièrement de côté l'altération des positions des corps qui se produit pendant la transmission de l'état de P à Π.

4. Voici les hypothèses que nous ferons de notre côté au sujet de la gravitation et de son action:

1) Nous supposons que chaque corps est entouré par un champ de gravitation, où sa masse se manifeste comme un état primaire, qui en émane avec une vitesse c dans toutes les directions. On pourrait peut-être se figurer que ce soit un mouvement ondulatoire se transmettant dans un éther qui entoure la masse et la suit, du moins en partie. L'onde primaire qui sort du corps Π au temps t_0 se trouve au temps $\bar{t}$ sur une surface sphérique dont le rayon est égal à $c(\bar{t} - t_0)$. Nous supposons que le centre de l'onde primaire se trouve au temps $\bar{t}$ à la place qu'aurait le corps Π, si son mouvement après t_0 avait été rectiligne et uniforme, sa vitesse ayant la même grandeur et la même direction que Π à l'instant t_0. Le corps et le centre de l'onde de gravitation se confondent donc seulement si le mouvement du corps est rectiligne et uniforme. Tous les points de l'onde ont la même vitesse que son centre. Dans les applications on suppose bien entendu implicitement que la vitesse du corps est petite par rapport à la vitesse de gravitation c

2) S'il y a deux corps nous supposons que leurs champs de gravitation puissent se traverser sans se perturber. Une action entre la masse et le champ ne peut se produire que dans les points où se trouve une masse.

3) Si l'onde primaire d'un corps Π à l'instant $\bar{t}$ rencontre un autre corps P, nous supposons qu'il fait naître dans le champ de P une onde secondaire qui se propage de la même manière qu'une onde primaire de P, avec la différence toutefois que la direction et la vitesse du centre de l'onde secondaire sont les mêmes que celles de l'onde primaire du Π, qui passe P à l'instant considéré t.

4) Quand l'onde secondaire dans le champ de P à un instant t revient à Π nous supposons qu'elle exerce sur Π une force qui sera justement l'attraction que la gravitation fait naître.

5. Si la vitesse du corps Π par rapport au champ de P à l'instant t est nulle nous supposons que la grandeur K^0 de la force attractive est donnée par la formule

$$K^0 = \frac{k^2\, m\, M}{\Delta^2}, \tag{1}$$

où k est la constante de Gauss, m la masse de Π, M la masse de P et Δ le rayon de l'onde secondaire à l'instant t. La direction de la force sera vers le centre de l'onde.

6) Si au contraire le corps Π a une vitesse ψ par rapport au champ de P à l'instant t nous supposerons que la direction de la force, au lieu d'être celle de K^0, change de la même manière que la direction de la lumière par l'aberration des étoiles fixes. Enfin nous supposons alors que la grandeur K de la force effective soit à K^0 comme une certaine puissance f de c est à la même puissance f de la diagonale G du parallélogramme d'aberration, dont les côtés sont ψ et c. Cette dernière supposition signifie que la grandeur de la force dépend de la vitesse relative avec laquelle l'onde secondaire passe le corps Π. La valeur de l'exposant f sera déterminée plus tard et nous verrons que $f = 2$ est la seule valeur possible.

5. Nous allons maintenant chercher les équations différentielles des mouvements des deux corps P et Π, dont les masses soient M et m. Prenons trois axes rectangulaires fixes. Soit X, Y, Z les coordonnées du corps P et ξ, η, ζ les coordonnées du corps

Π et x, y, z les coordonnées du corps Π par rapport à P de sorte qu'on a

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \xi - X, \\ y = \eta - Y, \\ z = \zeta - Z. \end{cases}$$

On peut se figurer p. ex. que P soit le soleil et Π une planète. Les dérivées des diverses quantités par rapport au temps seront indiquées par des accents, p. ex. $X', \xi', x', X'', \cdots$

Supposons que l'onde primaire de gravitation part de Π à l'instant t_0 et atteint P à l'instant $\bar t$. L'onde secondaire partant de P à l'instant $\bar t$ atteindra à son tour Π à l'instant t. Pour abréger nous écrivons

$$(3)\qquad \begin{cases} t_0 = t - \tau_0 \\ \bar t = t - \tau \end{cases}$$

Les formules pour les coordonnées y et z étant de la même forme que celles de la coordonnée x, nous pouvons nous borner à n'écrire en entier que les équations en x. Les valeurs des diverses quantités aux temps t, t_0 et $\bar t$ seront indiquées d'une manière analogue p. ex. $X, X_0, \bar X, \xi, \xi_0, \bar\xi, X', X'_0, \bar X', \cdots$

Nous supposerons que les intervalles de temps τ_0 et τ sont si petits que nous pouvons développer les diverses quantités selon les puissances de τ_0 et τ. Nous aurons alors à l'instant t_0:

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \xi - \xi' \tau_0 + \frac{1}{2} \xi'' \tau_0^2 - \cdots, \\ \xi'_0 = \xi' - \xi'' \tau_0 + \cdots, \\ \xi'_0 = \xi'' - \cdots, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} X_0 = X - X' \tau_0 + \frac{1}{2} X'' \tau_0^2 - \cdots, \\ X'_0 = X' - X'' \tau_0 + \cdots, \\ X''_0 = X'' \quad \cdots, \end{cases}$$

et à l'instant $\bar t$:

$$(6)\qquad \bar X = X - X' \tau + \frac{1}{2} X'' \tau^2 - \cdots$$

Le centre de l'onde primaire a à l'instant $\bar{t}$ la coordonnée

$$\varphi_x = \xi_0 + \xi'_0 (\tau_0 - \tau)$$

ou selon (4)

$$(7) \qquad \varphi_x = \xi - \xi' \tau + \frac{1}{2} \xi'' \tau_0 (2\tau - \tau_0) - \cdots$$

La projection sur l'axe de x du rayon de l'onde primaire à l'instant $\bar{t}$ est égale à $\bar{X} - \varphi_x$. D'après (2), (4), (6) et (7) on a

$$(8) \qquad X - \varphi_x = -x + x'\tau - \frac{1}{2} x'' \tau_0 (2\tau - \tau_0) + \frac{1}{2} X'' (\tau_0 - \tau)^2 + \cdots$$

D'autre côté, la longueur de ce rayon étant égale à $c(\tau_0 - \tau)$, on trouve

$$(9) \qquad \begin{aligned} c^2 (\tau_0 - \tau)^2 &= (X - \varphi_x)^2 + (Y - \varphi_y)^2 + (Z - \varphi_z)^2 \\ &= r^2 - 2\, r\, r' \tau + \cdots \end{aligned}$$

où r est la distance entre les corps P et Π à l'instant t de sorte qu'on a

$$(10) \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ rr' = xx' + yy' + zz'. \end{cases}$$

Dans l'équation (9), qui sert à déterminer τ_0 et τ, nous avons omis les termes qui deviendront d'un ordre supérieur à deux par rapport à la quantité

$$(11) \qquad \lambda = \frac{1}{c},$$

que nous supposons être petite, et d'après les puissances de laquelle nous développerons les diverses quantités dans la suite.

De l'équation (9) on tire

$$(12) \qquad \tau_0 - \tau = \lambda r \left(1 - \frac{r'}{r} \tau + \cdots \right).$$

Soit X_1 le centre de l'onde secondaire au temps $t = \bar{t} + \tau$. On a, d'après nos suppositions,

$$X_1 = X + \xi'_0 \tau,$$

ou, selon (2), (4) et (6)

$$X_1 = X + x' \tau - x'' \tau \tau_0 - \frac{1}{2} X'' \tau (2 \tau_0 - \tau) + \cdots$$

Le rayon Δ de l'onde secondaire, dont la longueur et la direction déterminent la grandeur et la direction de la force K^0, a sur l'axe des x la projection

$$(13) \quad \xi - X_1 = x - x' \tau + x'' \tau \tau_0 + \frac{1}{2} X'' \tau (2 \tau_0 - \tau) + \cdots$$

On en tire:

$$\Delta^2 = r^2 - 2 r r' \tau + \cdots$$

et comme, d'autre côté, $\Delta = c\tau$, on trouve

$$\tau = \lambda r \left(1 - \frac{r' \tau}{r} + \cdots \right)$$

ou encore

$$(14) \quad \tau = \lambda r (1 - \lambda r' + \cdots)$$

et, d'après l'équation (12), avec la même exactitude

$$(15) \quad \tau_0 = 2 \tau.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (13) on trouve que

$$(16) \quad \xi - X_1 = x - \lambda r x' + \lambda^2 r r' x' + \lambda^2 r^2 \left(2 x'' + \frac{3}{2} X''\right) + \cdots$$

Cette équation, et les équations analogues en y et z, donneront

$$(17) \quad \Delta^2 = r^2 \left(1 - 2 \lambda r' + \lambda^2 (2 r'^2 + V + 4 s + 3 S) + \cdots \right),$$

où nous avons posé

$$(18) \quad V = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$(19) \quad s = x x'' + y y'' + z z'',$$

$$(20) \quad S = x X'' + y Y'' + z Z''.$$

En ayant égard à la formule (17), on trouve, d'après l'équation (1),

$$(21) \quad \frac{1}{k^2 m M} K^0 = \frac{1}{r^2} \left(1 + 2 \lambda r' + \lambda^2 (2 r'^2 - V - 4 s - 3 S) + \cdots \right)$$

et, comme la projection de la force K^0 sur l'axe des x est

$$K_x^0 = -k^2 m M \frac{\xi - X_1}{\Delta^3},$$

on aura après quelques réductions

$$(22) \quad \frac{1}{k^2 m M} K_x^0 = -\frac{x}{r^3} \left[1 + 3\lambda r' + \frac{3}{2}\lambda^2 (3r'^2 - V - 4s - 3S) + \cdots \right]$$
$$+ \lambda \frac{x'}{r^2} + 2\lambda^2 \frac{r' x'}{r^2} - \frac{\lambda^2}{r}\left(2x'' + \frac{3}{2}X''\right) + \cdots$$

6. Nous chercherons ensuite l'effet du changement de la direction de la force analogue à l'aberration. Avant tout il nous faut connaître les composantes ψ_x, ψ_y, ψ_z de la vitesse ψ du corps Π par rapport au champ de gravitation de P à l'endroit où se trouve Π à l'instant t. Le champ de gravitation de P au point Π et à l'instant t a le même mouvement par rapport aux axes fixes que le corps P a au temps $t - \tau$ c'est à dire

$$\overline{X'} = X' - \tau X'' + \cdots$$

La composante de la vitesse de Π par rapport à l'axe des x étant ξ' il en résulte que

$$(23) \quad \psi_x = \xi' - \overline{X'} = x' + \tau X'' + \cdots = x' + \lambda r X'' + \cdots$$

Les côtés du parallélograme en question sont les vecteurs ψ, dont les composantes sont ψ_x, ψ_y, ψ_z, et c, dont la direction est celle de la force K^0. La diagonale G du parallélogramme représentera la direction apparente de l'attraction K. Soit K_x, K_y et K_z les projections de K sur les axes. Par projection du triangle formé par les deux côtés et la diagonale du parallélogramme sur l'axe des x on trouve aisément

$$(24) \quad G\frac{K_x}{K} = c\frac{K_x^0}{K^0} - \psi_x,$$

et ainsi de là

$$G^2 = c^2 + \psi^2 - 2c\frac{K_x^0 \psi_x + K_y^0 \psi_y + K_z^0 \psi_z}{K^0}.$$

après quoi, la substitution des valeurs (21), (22) et (23) donne

$$G^2 = c^2 (1 + 2\,\lambda r' + 2\,\lambda^2 r'^2 + 2\,\lambda^2 S - \lambda^2 V + \cdots),$$

d'où suit enfin

$$\frac{c}{G} = 1 - \lambda r' + \frac{1}{2}\lambda^2 (r'^2 + V - 2\,S) + \cdots \tag{25}$$

Nous avons supposé que

$$\frac{K}{K^0} = \left(\frac{c}{G}\right)^f. \tag{26}$$

Des équations (24) et (26) on tire

$$K_x = \left(\frac{c}{G}\right)^{f+1} (K_x^0 - \lambda\, K^0 \psi_x)$$

et en ayant égard aux développements (21), (22), (23) et (25) on trouve enfin

$$\begin{aligned}\frac{K_x}{k^2\,m\,M} = -\frac{x}{r^3}\Bigg[&1 + (2-f)\,\lambda r' + \frac{(2-f)^2}{2}\lambda^2 r'^2 - \frac{2-f}{2}\lambda^2 V \\ &- 6\,\lambda^2 s - \frac{2f+11}{2}\lambda^2 S + \cdots\Bigg] \\ &- \frac{\lambda^2}{r}\left(2\,x'' + \frac{5}{2}X''\right) + \cdots\end{aligned} \tag{27}$$

L'équation différentielle en x du mouvement du corps II est ainsi

$$\xi'' = -\frac{k^2\,M\,x}{r^3}(1+H) - \frac{k^2\,M\lambda^2}{r}\left(2\,x'' + \frac{5}{2}X''\right) + \frac{2f+11}{2}\frac{k^2 M\lambda^2}{r^3}x\,S + \cdots \tag{28}$$

où nous avons posé

$$H = (2-f)\,\lambda\,r' + \frac{(2-f)^2}{2}\lambda^2 r'^2 - \frac{2-f}{2}\lambda^2 V^2 - 6\,\lambda^2 s. \tag{29}$$

L'équation correspondante pour le mouvement du corps P s'obtient de l'équation (28) par échange des quantités m et M, ξ et X (et par suite x à $-x$). On trouve de cette manière

(30) $$X'' = \frac{k^2 m x}{r^3}(1 + H) + \frac{k^2 m \lambda^2}{r}\left(2x'' - \frac{5}{2}\xi''\right) + \frac{2f - 11}{2}\frac{k^2 m \lambda^2}{r^3} x S + \cdots$$

où

$$S = x\xi'' + y\eta'' + z\zeta''.$$

Les équations (28) et (30) donnent enfin par soustraction

$$x'' = -\frac{k^2(M + m)x}{r^3}(1 + H) - \frac{2k^2(M + m)\lambda^2}{r}x''$$
$$-\frac{5}{2}\frac{k^2\lambda^2}{r}(MX'' - m\xi'') + \frac{2f - 11}{2}k^2\lambda^2\frac{x}{r^3}(MS - mS) + \cdots$$

Pour la réduction des membres droits de ces équations il suffit de se servir des valeurs

$$x'' = -\frac{k^2(M + m)x}{r^3};\ \xi'' = -\frac{k^2 M x}{r^3};\ X'' = \frac{k^2 m x}{r^3},$$

et on obtient aisément

(31) $$x'' = -\frac{k^2(M + m)x}{r^3}(1 + L),$$

où

(32) $$L = (2 - f)\lambda r' + \frac{(2 - f)^2}{2}\lambda^2 r'^2 - \frac{2 - f}{2}\lambda^2 V$$
$$+ \frac{k^2\lambda^2}{r}\left(4(M + m) - (2f + 6)\frac{Mm}{M + m}\right) + \cdots$$

7. De l'équation (31) et des équations correspondantes en y et z on voit que le mouvement du corps Π par rapport au corps P est un mouvement central, où le corps Π est actionné par une force centrale, dont la grandeur est

$$\frac{k^2(M + m)}{r^2}(1 + L).$$

Si l'on a $L = 0$ le mouvement est le mouvement képlérien ordinaire. Nous prenons L en considération par la méthode de la variation des éléments elliptiques. Le mouvement est alors perturbé par une force

$$(33) \qquad R = -\frac{k^2(M+m)}{r^2} L$$

dirigée suivant le prolongement du rayon vecteur. Une telle force ne produit des perturbations que dans les éléments: le demi grand axe a, l'excentricité e, la longitude du périhélie ϖ et la longitude moyenne de l'époque ε.

Les équations différentielles des éléments elliptiques sont

$$\frac{da}{dt} = \frac{2e}{n\sqrt{1-e^2}} R \sin v,$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} R \sin v,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2r}{na^2} R + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{d\varpi}{dt},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena} R \cos v,$$

où v désigne l'anomalie vraie et

$$n = \frac{k\sqrt{M+m}}{a^{3/2}}$$

le mouvement moyen.

Au lieu de t nous prendrons v comme variable indépendante. Parce que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}$$

on trouve, en ayant égard à l'équation (33), que

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dv} &= -\frac{2ae}{1-e^2} L \sin v, \\ \frac{de}{dv} &= -L \sin v, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= 2\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}} L + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} L \cos v, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{L}{e} \cos v \end{aligned} \right.$$

Les termes périodiques étant très petits, nous ne considérons dans ces équations que les termes séculaires. Ils résultent seulement des parties constantes des membres droits.

En ayant égard à ce que

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v},$$

$$r' = \frac{ane}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v,$$

$$V = k^2 (M + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

on voit immédiatement que dans les membres droits des deux premières équations (34) des constantes ne peuvent s'obstenir que du terme $(2 - f) \lambda r'$ de L. En n'écrivant que les parties constantes des membres droits, on trouve

$$\frac{da}{d\tau} = - \frac{(2 - f) e^2 k \lambda \sqrt{M + m} \sqrt{a}}{(1 - e^2)^{3/2}},$$

$$\frac{de}{d\tau} = - \frac{(2 - f) e k \lambda \sqrt{M + m}}{2 \sqrt{a} \sqrt{1 - e^2}}.$$

Si l'on suppose que les corps soient le soleil et Mercure et substitue les valeurs numériques correspondantes et suppose enfin que la vitesse c est égale à la vitesse de la lumière, on trouve que e diminue de la valeur 0.000105 $(2 - f)$ pendant une révolution de Mercure autour du soleil ou de la valeur 0.000437 $(2 - f)$ par année. Une diminuation appréciable n'a pas été observée et nous en concluons que

$$(35) \qquad f = 2.$$

Pour cette valeur de f les termes séculaires de a et e disparaissent tout à fait et l'expression de L se simplifie.

Les parties séculaires de ε et $\overline{\omega}$ se tirent maintenant des équations

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{2 \lambda^2 k^2 (M + m)}{p} \left(4 \sqrt{1 - e^2} + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right) H.$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dr} = \frac{2\,\lambda^2\,k^2\,(M+m)}{p}\,H, \tag{36}$$

où

$$p = a\,(1-e^2),\ H = 1 - \frac{5}{2}\,\frac{Mm}{(M+m^2)}.$$

Nous ne considérerons pas davantage la partie séculaire de ε, parce qu'elle entre dans le mouvement moyen quand on détermine celui-ci par les observations. En remarquant que dans le cas des planètes m est très petit par rapport à M, de sorte qu'il est permis de faire $H = 1$, et en supposant de nouveau que c soit égal à la vitesse de la lumière on trouve que la formule (36) donne au mouvement du périhélie précisément $^2/_3$ de la valeur que donne la théorie de la relativité. Cette valeur étant pour Mercure 42″.9, notre théorie donne pour Mercure la valeur

28″.6.

D'après M. H. KIENLE [1]) on peut conclure des observations et des théories des planètes seulement que le mouvement anormal du périhélie de Mercure se trouve entre les limites 27″ et 45″. Notre hypothèse donne ainsi une valeur acceptable.

Les hypothèses que nous avons faites sont certainement artificielles à plusieurs égards. Peut-être peut-on s'en servir comme de points de départ pour des hypothèses plus naturelles et plus complètes.

En terminant cet article je tiens à remercier M. le Docteur E. BEAURAIN, qui a bien voulu revoir mon manuscript du point de vue de la langue.

[1]) Die Naturwissenschaften. Tome 10 p. 250, 1922.

ÜBER DIE LOGARITHMISCHE ABLEITUNG EINER MEROMORPHEN FUNKTION

Von

FRITHIOF NEVANLINNA

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
BUCHDRUCKEREI A.-G. SANA

Über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion.

1. Wenn $z(x)$ eine meromorphe Funktion ist und $T(r)$ ihre charakteristische Funktion[1]), so weiss man gemäss einem Satz von R. Nevanlinna, dass das m der logarithmischen Ableitung,

[1]) Ich erinnere kurz an die Definitionen der von R. Nevanlinna in die Theorie der meromorphen Funktionen eingeführten Fundamentalgrössen.

Es sei, mit Beachtung der Multiplizitäten, $n(r, z)$ die Anzahl der innerhalb des Kreises $|x| = r$ fallenden Unendlichkeitsstellen von $z(x)$ und

$$N(r, z) = \int_0^r \frac{n(t, z) - n(o, z)}{t} dt + n(o, z) \log r,$$

wo also $n(o, z)$ die Multiplizität des Punktes $x = 0$ bezeichnet, falls er ein Pol der Funktion ist.

Es sei ferner

$$m(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |z(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

wo allgemein $\overset{+}{\log} a = \log a$ oder $= 0$ ist, je nachdem $a > 1$ oder $0 < a \leq 1$.

Die charakteristische Funktion von $z(x)$ kann dann z. B. durch die Gleichung

$$T(r) = m(r, z) + N(r, z)$$

definiert werden. Bekanntlich ist $T(r)$ — und offenbar auch $N(r, z)$ — eine für $r > 1$ positive, wachsende Funktion, welche in bezug auf $\log r$ konvex ist. Nach dem „ersten Hauptsatz" von R. Nevanlinna hat man für jedes endliche oder unendliche komplexe a

$$m\left(r, \frac{1}{z-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{z-a}\right) = T(r) + O(1),$$

wo $O(1)$ die herkömmliche Bezeichnung einer Grösse ist, die für $r \to \infty$ unter einer endlichen Schranke liegt.

$m\left(r, \frac{z'}{z}\right)$, unter einer Grenze liegt, die für $r \to \infty$ asymptotisch im wesentlichen derselben Grössenordnung ist wie $\log T(r)$. In der modernen Theorie der meromorphen Funktionen, soweit diese vermittels sog. „elementärer Methoden" behandelt wird, ist dieser Satz bekanntlich von entscheidender Bedeutung. Nicht nur der Beweis des „zweiten Hauptsatzes", sondern auch die allgemeineren Sätze über linear abhängige meromorphe Funktionen fussen ganz wesentlich auf diesem Satz über die logarithmische Ableitung.

Der Satz wurde von meinem Bruder mit Hilfe der sog. Poisson-Jensenschen Formel bewiesen, die ja überhaupt als methodische Grundlage seiner Theorie der meromorphen Funktionen dient. Nun hat kürzlich Herr H. Selberg, der sich mit Ausdehnung dieser Theorie auf sog. algebroide Funktionen beschäftigt hat, einen zweiten Beweis des genannten Satzes brieflich mitgeteilt. Diese Mitteilung hat mich veranlasst, einen Beweis dieses Satzes auszuarbeiten, dessen Gedankengang sich sehr nahe derjenigen Methode anschliesst, deren ich mich in einigen früheren Abhandlungen [1]) zum Beweis des oben genannten „zweiten Hauptsatzes" bedient habe. Ich werde diesen Beweis, der als eine Bearbeitung des von Herrn Selberg gegebenen anzusehen ist und einige Vorteile hat, unten ausführen.

2. Man kann leicht eine reelle in der ganzen z-Ebene eindeutige Funktion $u(z)$ angeben mit folgenden Eigenschaften:

1:o $u(z)$ ist nebst ihren Ableitungen überall endlich und stetig, den Null- und Unendlichkeitspunkt ausgenommen, wo diese Funktion sich so verhält, dass in der Umgebung dieser Punkte

$$u(z) = \frac{\pi}{2} \left| \log |z| \right| - \log \left| \log |z| \right| - 1 + \varepsilon(z),$$

[1]) *Über die Wertverteilung einer analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten wesentlich singulären Stelle.* Bericht auf dem 6:ten skandinavischen Mathematikerkongress in Kopenhagen, 1925.

Über die Anwendung einer Klasse uniformisierender Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen. Acta Math. Bd. 50, 1927.

wobei $\varepsilon(z)$ eine Funktion bezeichnet, die nebst ihren mit z multiplizierten Ableitungen erster Ordnung für $z \to 0$ und $z \to \infty$ verschwindet.

2:o Es ist

$$\Delta u(z) = \frac{1}{|z|^2 (1 + \log^2 |z|)}.$$

Die Funktion u ist durch diese Eigenschaften offenbar eindeutig bestimmt; man findet sie leicht, wenn man sie als Funktion von $\log |z| = t$ allein sucht. Die obige partielle Differentialgleichung geht nämlich dann über in

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{1}{1 + t^2},$$

woraus sich bei angemessener Wahl der Integrationskonstanten

$$u = t \operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{2} \log (1 + t^2), \quad t = \log |z|$$

ergibt; für den arcus tangens ist hier der reelle Zweig zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Man verifiziert leicht, dass diese Funktion sich gemäss den in 1:o aufgestellten Forderungen verhält. Im Folgenden brauche ich übrigens den expliziten Ausdruck der Funktion u gar nicht; es kommt allein auf die Eigenschaften 1:o und 2:o an.

Ferner wird in der nachfolgenden Herleitung die „logarithmische Ungleichung"

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(t)\, dt \leq \log \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right)$$

benutzt, die auch in den beiden oben zitierten Abhandlungen als technisches Hilfsmittel eine wichtige Rolle spielt. Diese Ungleichung, wo $f(t)$ eine beliebige reelle und positive Funktion bezeichnet und $a < b$, besagt, dass der Mittelwert des Logarithmus einer solchen Funktion nicht grösser als der Logarithmus des Mit-

telwertes ist; sie folgt durch einen Grenzübergang unmittelbar daraus, dass der geometrische Mittelwert positiver Grössen höchstens gleich dem arithmetischen Mittel derselben ist.

Schliesslich erinnere ich an folgende unmittelbar einleuchtende Ungleichungen:

$$\overset{+}{\log}(a_1 a_2 \cdots a_n) \leqq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2 + \cdots + \overset{+}{\log} a_n,$$

$$\overset{+}{\log}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leqq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2 + \cdots + \overset{+}{\log} a_n + \log n:$$

hier sind die a:s positive Grössen und $\overset{+}{\log} a = \log a$ oder $= 0$, je nachdem $a > 1$ oder $a \leqq 1$.

3. Sei $z(x)$ jetzt eine meromorphe Funktion. Man bilde vermittels der oben eingeführten Funktion $u(z)$ die zusammengesetzte Funktion

$$v(x) = u[z(x)].$$

Infolge der Eigenschaften der äusseren Funktion $u(z)$ verhält sich $v(x)$ folgendermassen:

1:o $v(x)$ ist nebst ihren Ableitungen endlich und stetig mit Ausnahme der Null- und Unendlichkeitsstellen von $z(x)$. Falls in der Umgebung einer solchen Stelle a

$$z(x) = (x-a)^p \{c_p + c_{p+1}(x-a) + \cdots\},$$

wo p eine positive oder negative ganze Zahl ist und $c_p \neq 0$, so hat man in der Umgebung von a

$$v(x) = \frac{\pi}{2} p \log \frac{1}{|x-a|} - \log\log \frac{1}{|x-a|} + \text{const.} + \varepsilon(x-a),$$

wo ε nebst ihren mit $x-a$ multiplizierten Ableitungen erster Ordnung für $x \to a$ gegen Null streben.

2:o Es ist

$$\Delta v = \left|\frac{z'(x)}{z(x)}\right|^2 \frac{1}{1+\log^2|z(x)|}.$$

Ich wende jetzt die Gaussscche Integraltransformationsformel

$$\int \frac{\partial v}{\partial n} ds = -\int \Delta v \, df$$

auf die Funktion $v(x)$ in dem Kreisgebiet $|x| \leq r$ an, wobei die innerhalb dieses Kreises liegenden Null- und Unendlichkeitsstellen von $z(x)$ in bekannter Weise vermittels Kreisen mit verschwindenden Radien zu isolieren sind. Bei Beachtung des oben beschriebenen Verhaltens der Funktion v erhält man

$$\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} v(re^{i\varphi})\, d\varphi + \frac{\pi}{2}\left\{n(r, z) + n\left(r, \frac{1}{z}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^r t\,dt \int_0^{2\pi} \left|\frac{z'(te^{i\varphi})}{z(te^{i\varphi})}\right|^2 \frac{d\varphi}{1+\log^2|z|}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\, d\varphi = \mu(r), \quad \mu(r) + \frac{\pi}{2}\left\{N(r, z) + N\left(r, \frac{1}{z}\right)\right\} = \psi(r),$$

so kann diese Gleichung

$$\frac{1}{r}\int_0^r t \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{z'}{z}\right|^2 \frac{d\varphi}{1+\log^2|z|} = \psi'(r)$$

geschrieben werden, woraus sich unmittelbar die Ungleichung

$$\frac{1}{r}\int_0^r t \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\left|\frac{z'}{z}\right|^2}{1+\log^2|z|}\, d\varphi \leq \psi'(r) + \frac{r}{2} < \psi'(r) + r$$

ergibt, welche der Ausgangspunkt der folgenden Herleitung ist.

Man nehme nun zunächst in dieser Ungleichung beiderseits die Logarithmen und wende hierauf links zweimal nacheinander die oben erwähnte logarithmische Ungleichung an. Nach Ausführung einiger selbstverständlichen Rechnungen und nach Umordnung der Glieder ergibt sich

$$\frac{1}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1+\left|\frac{z'}{z}\right|^2\right) d\varphi < \log\left[\psi'(r)+r\right] + 1 + \log\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1+\log^2|z|\right) d\varphi .$$

Hier ist die linke Seite nicht kleiner als

$$\frac{2}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{z'}{z}\right| d\varphi = \frac{2}{r}\int_0^r m\left(t, \frac{z'}{z}\right) dt;$$

ferner ist das rechts auftretende Integral nicht grösser als

$$\frac{1}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1+|\log|z||\right)^2 d\varphi = \frac{2}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1+|\log|z||\right) d\varphi,$$

und dieses Integral wiederum nach der logarithmischen Ungleichung nicht grösser als

$$2\log \frac{1}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+|\log|z||\right) d\varphi = 2\log\left\{1+\frac{1}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|z|| \, d\varphi\right\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\log|z(te^{i\varphi})|\right| d\varphi = m(t,z) + m\left(t,\frac{1}{z}\right) \leq 2\,T(t) + O(1),$$

und somit, da T eine wachsende Funktion ist,

$$\log\left\{1+\frac{1}{r}\int_0^r \frac{dt}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|z|| \, d\varphi\right\} \leq \log\left\{2\,T(r)+O(1)\right\}$$
$$\leq \overset{+}{\log}\left\{2\,T(r)+O(1)\right\} < \overset{+}{\log}\,T(r)+O(1).$$

Alles zusammengenommen wird hiernach

$$\frac{1}{r}\int_0^r m\left(t,\frac{z'}{z}\right) dt < \frac{1}{2}\log\left\{\psi'(r)+r\right\} + \overset{+}{\log}\,T(r) + O(1).$$

Man integriere nun diese Ungleichung zwischen den Grenzen 0 und $\varrho > 0$. Gemäss der logarithmischen Ungleichung ist

$$\frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \log\{\psi'(r)+r\}\,dr \leq \log\frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \{\psi'(r)+r\}\,dr = \log\left\{\frac{\psi(\varrho)-\psi(0)}{\varrho}+\frac{\varrho}{2}\right\}$$

und dieser Ausdruck nicht grösser als

$$\overset{+}{\log}\left\{\frac{\psi(\varrho)-\psi(0)}{\varrho}+\frac{\varrho}{2}\right\} \leq \overset{+}{\log}\{\psi(\varrho)-\psi(0)\}+\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho}+\overset{+}{\log}\varrho+O(1)$$
$$\leq \overset{+}{\log}\psi(\varrho)+\overset{+}{\log}\varrho+O(1).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \overset{+}{\log} T(r)\,dr \leq \overset{+}{\log} T(\varrho),$$

und somit

$$\frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \frac{dr}{r}\int_0^r m\left(t,\frac{z'}{z}\right)dt < \overset{+}{\log}\psi(\varrho)+\overset{+}{\log}\varrho+\overset{+}{\log}T(\varrho)+O(1).$$

Ich habe hierbei der Einfachheit wegen angenommen, dass $x = 0$ weder eine Nullstelle noch ein Pol der Funktion $z(x)$ ist, was offenbar keine wesentliche Einschränkung bedeutet.

Es erübrigt jetzt noch das Verhalten von $\psi(\varrho)$ für $\varrho \to \infty$ zu untersuchen, wobei wir uns mit einer Abschätzung nach oben begnügen. Es war $\psi(\varrho) = \mu(\varrho) + \frac{\pi}{2}\left\{N(\varrho, z) + N\left(\varrho, \frac{1}{z}\right)\right\}$; wir schreiben

$$\mu(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varrho e^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,[z(\varrho e^{i\varphi})]\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|<\frac{1}{e}} + \frac{1}{2\pi}\int_{|z|>e} + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{e}\leq|z|<e}.$$

Das letzte Integral ist offenbar für $\varrho \to \infty$ beschränkt. Für das erste Integral rechts erhält man bei Beachtung des Verhaltens der Funktion $u(z)$ in der Umgebung von $z = 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|<\frac{1}{e}} u\,[z\,(\varrho e^{i\varphi})]\,d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{|z|<\frac{1}{e}} \log\frac{1}{|z|}\,d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|<\frac{1}{e}} \log\log\frac{1}{|z|}\,d\varphi + O\,(1).$$

Das zweite Integral rechts ist stets positiv und das erste unterscheidet sich von $\frac{\pi}{2}\,m\left(\varrho, \frac{1}{z}\right)$ um weniger als

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{1}{e}<|z|<1} \log\frac{1}{|z|}\,d\varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|<\frac{1}{e}} u\,[z\,(\varrho e^{i\varphi})]\,d\varphi < \frac{\pi}{2}\,m\left(\varrho, \frac{1}{z}\right) + O\,(1).$$

In derselben Weise ergibt sich, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|>e} u\,[z\,(\varrho e^{i\varphi})]\,d\varphi < \frac{\pi}{2}\,m\,(\varrho, z) + O\,(1).$$

Hiernach ist also $\mu\,(\varrho) < \frac{\pi}{2}\left\{ m\,(\varrho, z) + m\left(\varrho, \frac{1}{z}\right)\right\} + O\,(1)$, somit

$$\psi\,(\varrho) < \frac{\pi}{2}\left\{ m\,(\varrho, z) + N\,(\varrho, z) + m\left(\varrho, \frac{1}{z}\right) + N\left(\varrho, \frac{1}{z}\right)\right\} + O\,(1) = \pi\, T(\varrho) + O\,(1)$$

und

$$\overset{+}{\log}\,\psi\,(\varrho) < \overset{+}{\log}\,T\,(\varrho) + O\,(1).$$

Wir erhalten also als Endresultat die Ungleichung:

$$\frac{1}{\varrho}\int\limits_0^{\varrho}\frac{dr}{r}\int\limits_0^{r} m\left(t, \frac{z'}{z}\right)dt < 2\,\overset{+}{\log}\,T\,(\varrho) + \overset{+}{\log}\,\varrho + O\,(1).$$

4. Die oben hergeleitete Ungleichung zeigt, dass ein gewisser Mittelwert von $m\left(t, \frac{z'}{z}\right)$ unterhalb einer Schranke liegt, die im wesentlichen derselben Grössenordnung wie $\log T$ ist. Man könnte nun leicht diesen Mittelwert durch beliebige andere ersetzen; auch wäre es möglich, die obigen Betrachtungen so umzuformen und weiterzuführen, dass man zu einer entsprechenden Abschätzung

der Grösse $m\left(r, \frac{z'}{z}\right)$ selber gelangen würde. Indessen mag das Obige genügen, um so mehr, als man schon mittels der erhaltenen Mittelwertsungleichung die wichtigsten Sätze von R. Nevanlinna über die defekten Werte meromorpher Funktionen beweisen kann.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN GEOMETRISCHEN VERKNÜPFUNGSAXIOMEN UND GEWISSEN TAKTISCHEN KONFIGURATIONEN

Von

GUSTAF JÄRNEFELT

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Einige Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen den geometrischen Verknüpfungsaxiomen und gewissen taktischen Konfigurationen.

1. In dem zweiten Teil seiner Arbeit „*Tactical-Memoranda*" betrachtet MOORE[1]) *m verschiedene Elemente*, die wir hier etwa mit $1, 2, 3, \ldots, m$ bezeichnen können. Unter einer *n-ad* wird eine Kombination von n verschiedenen dieser Elemente verstanden. Unter einem „$S[n, l, m]$" versteht MOORE eine solche (nichtgeordnete) Menge von n-aden, dass eine jede l-ad in einer und nur einer n-ad vorkommt. Diese $S[n, l, m]$ sind ein spezieller Fall des sehr allgemeinen Begriffs „*taktische Konfiguration*".

Z. B. ist $S[3, 2, 7]$ die wohlbekannte Konfiguration 7_3[2]):

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3.

VEBLEN hat[3]) auch das $S[5, 2, 21]$

1	2	....	21
2	3	....	1
7	8	....	6
9	10	....	8
19	20	....	18

[1]) E. H. MOORE: *Tactical Memoranda I—III*, American Journal of Mathematics, Vol. XVIII, 1896, S. 264—303.

[2]) S. z. B. *Encyklopädie der Math. Wiss. III. 1. 1., 5a. Konfigurationen der projektiven Geometrie.* Von ERNST STEINITZ in Berlin 1910, S. 481—519, siehe speziell S. 486—490.

[3]) O. VEBLEN: *A System of Axioms for Geometry*, Trans. of the American Math. Soc., Vol. 5, 1904, S. 343—384.

gegeben und bemerkt, *dass, wenn man in diesen Konfigurationen die Elemente 1, 2, 3, . . . als Punkte und die Kolonnen (3-aden bzw. 5-aden) als Geraden deutet, die ebenen Verknüpfungsaxiome und das elliptische Parallelenaxiom, „zwei Geraden haben immer einen Punkt gemeinsam", erfüllt werden.* Das $S[5, 2, 21]$ hat ausserdem die bemerkenswerte Eigenschaft, dass bei ihm durch geeignete Interpretation der Anordnung auch die Hilbertschen Anordnungsaxiome mit Ausnahme des Axioms von Pasch, d. h. die Axiome II 1 — II 3, erfüllt werden können. Durch dieses so vervollständigte Modell *ist innerhalb der Planimetrie die Unabhängigkeit des Axioms von Pasch von den Axiomen I, II 1 — II 3 und sogar IV (Axiom der Parallelen) dargelegt*[1]).

2. Um die entsprechende Frage für die Raumgeometrie zu entscheiden, habe ich ein aus 85 Punkten, ebensovielen Ebenen und 357 Geraden bestehendes, den Hilbertschen Axiomen I, II 1 — II 3 und IV genügendes Modell, das aus einem $S[5, 2, 85]$ erhalten wird, konstruiert. Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich Herrn Rolf Nevanlinna, gelegentlich einer von ihm im Herbstsemester 1927 in Helsingfors gehaltenen Vorlesung[2]).

3. Es kann leicht gezeigt werden, dass ein Modell, das den *Verknüpfungsaxiomen*, dem *elliptischen Parallelenaxiom* und der

1) Endliche geometrische Modelle findet man auch bei Ch. Müntz in „*Ein nichtreduzierbares Axiomensystem der Geometrie*", Jahresb. d. D. M. V. 23 (1914), S. 54—80.

2) Auf eine briefliche Anfrage, ob derartige Modelle früher bekannt gewesen sind, hat Herr Paul Bernays mir mitgeteilt, dass vor ein paar Jahren Herr Boskowitz ein aus ebensovielen Punkten, Ebenen und Geraden, wie oben angegeben ist, bestehendes Modell zu demselben Zweck konstruiert hat. Während der Drucklegung habe ich von Herrn Bernays einen weiteren Brief erhalten, worin das Boskowitzsche Modell ausführlich beschrieben wird. Dieses Modell scheint mit dem hier auf S. 11 gegebenen *isomorph* zu sein, was die Verknüpfung betrifft, ist aber in anderer Weise konstruiert.

Voraussetzung „*auf jeder Geraden liegen genau n Punkte*" genügt, im Falle der *Planimetrie* aus

$$n_1 = 1 + (n - 1)\, n \text{ Punkten,}$$

ebensovielen Geraden, im Falle der *Raumgeometrie* aus

$$n_2 = 1 + (n - 1)\, n_1 = n\,(n^2 - 2\,n + 2) \text{ Punkten,}$$

ebensovielen Ebenen,

$$n_3 = \frac{n_1\, n_2}{n} = \frac{n_2\,(n_2 - 1)}{n\,(n - 1)} = (n^2 - 2\,n + 2)\,(n^2 - n + 1) \text{ Geraden}$$

bestehen muss.

Ein solches Modell nenne ich ein *n-Punktmodell.* Z. B. ist $S\,[3, 2, 7]$ ein planimetrisches 3-Punktmodell.

Die folgende Tabelle gibt für gewisse Werte von n die entsprechenden Werte für n_1, n_2 und n_3:

n	n_1	n_2	n_3
2	3	4	6
3	7	15	35
4	13	40	130
5	21	85	357
6	31	156	806

4. n-Punktmodelle kann man auch anders als VEBLEN konstruieren, z. B. für die Planimetrie in den Fällen $n = 3, 4, 5$ folgendermassen:

$n = 3.$

2	3	4	5	6	7	
1′	1′	2′	2′	3′	3′	1
		4′	5′	4′	5′	2
		6′,	7′	7′	6′	3

$n = 4.$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1′	1′	1′	2′	2′	2′	3′	3′	3′	4′	4′	4′	1
			5′	6′	7′	5′	6′	7′	5′	6′	7′	2
			8′	9′	10′	10′	8′	9′	9′	10′	8′	3
			11′	12′	13′	12′	13′	11′	13′	11′	12′	4

$n = 5.$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
1′	1′	1′	1′	2′	2′	2′	2′	3′	3′	3′	3′	4′	4′	4′	4′	5′	5′	5′	5′	1
				6′	7′	8′	9′	6′	7′	8′	9′	6′	7′	8′	9′	6′	7′	8′	9′	2
				10′	11′	12′	13′	11′	10′	13′	12′	12′	13′	10′	11′	13′	12′	11′	10′	3
				14′	15′	16′	17′	16′	17′	14′	15′	17′	16′	15′	14′	15′	14′	17′	16′	4
				18′	19′	20′	21′	21′	20′	19′	18′	19′	18′	21′	20′	20′	21′	18′	19′	5

Es bedeuten hierbei $1, 2, 3, \ldots$ Punkte und $1', 2', 3', \ldots$ Geraden. In dem Quadrat, das der k:ten Kolonne und h:ten Zeile gemeinsam ist, steht diejenige Gerade, die durch die Punkte k und h geht ($k = 2 \ldots n_1, h = 1$; $k = n + 1 \ldots n_1$, $h = 2 \ldots n$).

5. Für $n = p + 1$, wo p eine *Primzahl* ist, kann das planimetrische n-Punktmodell stets ebenso wie in den Fällen $n = 3, 4$ konstruiert werden.

In der Tat: Der aus den drei niedrigsten Zeilen bestehende Teil des Modells für $n = 4$ ist aus den Rechtecken

| 5′ | 6′ | 7′ |, | 8′ | 9′ | 10′ |, | 11′ | 12′ | 13′ |,

die wir bzw. mit A_0, A_1, A_2 bezeichnen wollen, und aus den 4 Rechtecken, welche durch zyklische Permutation der Geraden von A_1 und A_2 entstehen, zusammengesetzt. Wenn man allgemein diejenige Permutation, die

$$a, b, c \text{ in } c, a, b$$

überführt, mit z bezeichnet, so ist $z^3 = 1$, und das Modell kann übersichtlicher als vorher durch das folgende Schema dargestellt werden:

2 — 4	5 — 7	8 — 10	11 — 13	
1′	2′	3′	4′	1
	A_0	A_0	A_0	2
	A_1	$A_1 z$	$A_1 z^2$	3
	A_2	$A_2 z^2$	$A_2 z^4$	4

6. Hieraus erhält man ohne weiteres das analoge Modell für

$n = p + 1$, wobei $z^p = 1$:

2 bis n	$n+1$ bis $n+p$	$n+p+1$ bis $n+2p$	$n+2p+1$ bis $n+3p$	...	$n+(p-1)p+1$ bis $n+p^2=n_1$	
1′	2′	3′	4′	...	n'	1
	A_0	A_0	A_0	...	A_0	2
	A_1	$A_1 z$	$A_1 z^2$	...	$A_1 z^{p-1}$	3
	A_2	$A_2 z^{2 \cdot 1}$	$A_2 z^{2 \cdot 2}$	...	$A_2 z^{2(p-1)}$	4
	...	...	...	...	...	
	A_{p-1}	$A_{p-1} z^{(p-1) \cdot 1}$	$A_{p-1} z^{(p-1) \cdot 2}$	...	$A_{p-1} z^{(p-1)(p-1)}$	n

Wir zeigen nun erstens, dass dieses Modell das Axiom „*durch zwei verschiedene Punkte geht eine und nur eine Gerade*“ (I 1 und I 2 bei Hilbert) erfüllt.

Es ist unmittelbar klar, dass einem jeden der Punktpaare

$$\{\mu, \nu\} \; (\mu < \nu;\ \mu = 1 \ldots n;\ \nu = 2 \ldots n_1),$$

$$\{n + kp + \mu,\ n + kp + \nu\} \; (\mu \neq \nu;\ \mu, \nu = 1 \ldots p;\ k = 0 \ldots p - 1)$$

eine und nur eine Gerade entspricht.

Die übrigen Punktpaare sind von der Form

$$\{n + kp + \mu,\ n + lp + \nu\}$$
$$(k \neq l;\ k, l = 0 \ldots p - 1;\ \mu, \nu = 1 \ldots p).$$

Dem Punkt $n + kp + \mu$ entsprechen die Rechtecke $A_m z^{mk}$, dem Punkt $n + lp + \nu$ die Rechtecke $A_m z^{ml}$ $(m = 0 \ldots p - 1)$. Die Anzahl der dem Punktpaare $\{n + kp + \mu, n + lp + \nu\}$ entsprechenden Geraden ist nun gleich der Anzahl der Wurzeln m der Gleichung

$$\frac{z^{ml}}{z^{mk}} = \frac{z^{\nu}}{z^{\mu}}$$

oder der Kongruenz

$$m(l - k) \equiv \nu - \mu \pmod{p}.$$

Weil die $m(l - k)$ $(m = 0 \ldots p - 1)$ alle untereinander inkongruent $(\mathrm{mod}\, p)$ sind, hat die Kongruenz eine und nur eine Wurzel, etwa m_0. Die in dem Rechteck $A_{m_0}^{\frown}$ in dem $\mu - m_0 k \equiv \nu - m_0 l$-ten Quadrat vorkommende Gerade und nur sie entspricht dem Punktpaar $\{n + kp + \mu, n + lp + \nu\}$.

7. Zweitens gilt es zu zeigen, *dass zwei Geraden immer einen Punkt gemeinsam haben.* Dies gilt ohne weiteres für die folgenden Geradenpaare:

$$\{\mu', \nu'\}\ (\mu < \nu;\ \mu = 1 \ldots n;\ \nu = 2 \ldots n_1),$$

$$\{(n + kp + \mu)', (n + kp + \nu)'\}\ (\mu \neq \nu;\ \mu, \nu = 1 \ldots p;\ k = 0 \ldots p - 1)$$

Die Gerade $(n + kp + \mu)'$ $(\mu = 1 \ldots p, k = 0 \ldots p - 1)$ befindet sich in den Rechtecken $A_k z^{km}$ $(m = 0 \ldots p - 1)$, die Gerade $(n + lp + \nu)'$ in den Rechtecken $A_l z^{lm}$ $(m = 0 \ldots p - 1)$. Dass diese Geraden für $k \neq l$ einen Punkt gemeinsam haben, folgt daraus, dass die Gleichung in m

$$z^{\mu} \cdot z^{km} = z^{\nu} \cdot z^{lm}$$

eine Wurzel hat[1]).

8. Um das Modell für $n = 5$ schematisch darzustellen, bezeichnen wir diejenige Substitution, die

$a\,b\,c\,d$ in $b\,a\,d\,c$ überführt, mit z_1,
$a\,b\,c\,d$ „ $c\,d\,a\,b$ „ „ z_2,
$a\,b\,c\,d$ „ $d\,c\,b\,a$ „ „ z_3.

Es ist dann

$$z_1^2 = z_2^2 = z_3^2 = 1;$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 = z_3, \quad z_2 z_3 = z_3 z_2 = z_1, \quad z_3 z_1 = z_1 z_3 = z_2.$$

Mittels dieser Substitutionen kann das betreffende Modell so dargestellt werden:

2—5	6—9	10—13	14—17	18—21	
1′	2′	3′	4′	5′	1
	A_0	A_0	A_0	A_0	2
	A_1	$A_1 z_1$	$A_1 z_2$	$A_1 z_3$	3
	A_2	$A_2 z_2$	$A_2 z_3$	$A_2 z_1$	4
	A_3	$A_3 z_3$	$A_3 z_1$	$A_3 z_2$	5

Daraus, dass eine und nur eine der 4 Substitutionen für eine geordnete Menge von 4 Elementen $1, z_1, z_2, z_3$ das μ-te Element in das ν-te überführt $(\mu, \nu = 1 \ldots 4)$, und aus den obigen Gleichungen für z_1, z_2, z_3 folgt, dass auch dieses Modell die geforderten Eigenschaften besitzt.

9. Die im Vorigen gegebenen Modelle können leicht für den Raum generalisiert werden, z. B. im Falle $n = 3$ in folgender Weise:

1) Es sei bemerkt, dass bei allen diesen Modellen, wenn $n \geqq 6$ ist, „zwischen" so interpretiert werden kann, dass II 1 — II 3 erfüllt werden.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1′	1′	2′	2′	3′	3′	8′	8′	9′	9′	14′	14′	15′	15′	1
		4′	5′	4′	5′	10′	11′	10′	11′	16′	17′	16′	17′	2
		6′	7′	7′	6′	12′	13′	13′	12′	18′	19′	19′	18′	3
						20′	21′	22′	23′	20′	21′	22′	23′	4
						24′	25′	26′	27′	25′	24′	27′	26′	5
						28′	29′	30′	31′	30′	31′	28′	29′	6
						32′	33′	34′	35′	35′	34′	33′	32′	7 .

Schematisch kann dieses Modell so geschrieben werden:

2, 3	4, 5	6, 7	8, 9	10, 11	12, 13	14, 15	
1′	2′	3′	8′	9′	14′	15′	1
	A_0	A_0	A_0'	A_0'	A_0''	A_0''	2
	A_1	$A_1 z$	A_1'	$A_1' z$	A_1''	$A_1'' z$	3
			20′ B_0 23′		B_0		4
			24′ B_1 27′		$B_1 x$		5
			28′ B_2 31′		$B_2 y$		6
			32′ B_3 35′		$B_3 xy$		7 .

Es bedeutet hierbei

z diejenige Substitution, die $a\,b$ in $b\,a$ überführt,
x „ „ „ $a\,b\,c\,d$ „ $b\,a\,d\,c$ „ ,
y „ „ „ $a\,b\,c\,d$ „ $c\,d\,a\,b$ „ .

(x und y sind bei dem planimetrischen 5-Punktmodell mit z_1 bzw. z_2 bezeichnet worden).

Durch die für die Punkte und Geraden gegebene Verknüpfungsvorschrift ist auch die Verknüpfung zwischen den Punkten und Ebenen gegeben. Wie die Ebenen erklärt werden, zeigen wir ausführlich bei dem räumlichen Fünfpunktmodell, zu dem wir jetzt übergehen.

10. Dieses Modell ist, schematisch dargestellt, folgendes:

2–5	6–9			18–21	22–25			34–37	38–41			50–53	54–57			66–69	70–73			82–85	
1′	2′	3′	4′	5′	22′	23′	24′	25′	42′	43′	44′	45′	62′	63′	64′	65′	82′	83′	84′	85′	1
	A_0	A_0	A_0	A_0	$A_0^{(1)}$	$A_0^{(1)}$	$A_0^{(1)}$	$A_0^{(1)}$	$A_0^{(2)}$	$A_0^{(2)}$	$A_0^{(2)}$	$A_0^{(2)}$	$A_0^{(3)}$	$A_0^{(3)}$	$A_0^{(3)}$	$A_0^{(3)}$	$A_0^{(4)}$	$A_0^{(4)}$	$A_0^{(4)}$	$A_0^{(4)}$	2
	A_1	$A_1 z_1$	$A_1 z_2$	$A_1 z_3$	$A_1^{(1)}$	$A_1^{(1)} z_1$	$A_1^{(1)} z_2$	$A_1^{(1)} z_3$	$A_1^{(2)}$	$A_1^{(2)} z_1$	$A_1^{(2)} z_2$	$A_1^{(2)} z_3$	$A_1^{(3)}$	$A_1^{(3)} z_1$	$A_1^{(3)} z_2$	$A_1^{(3)} z_3$	$A_1^{(4)}$	$A_1^{(4)} z_1$	$A_1^{(4)} z_2$	$A_1^{(4)} z_3$	3
	A_2	$A_2 z_2$	$A_2 z_3$	$A_2 z_1$	$A_2^{(1)}$	$A_2^{(1)} z_2$	$A_2^{(1)} z_3$	$A_2^{(1)} z_1$	$A_2^{(2)}$	$A_2^{(2)} z_2$	$A_2^{(2)} z_3$	$A_2^{(2)} z_1$	$A_2^{(3)}$	$A_2^{(3)} z_2$	$A_2^{(3)} z_3$	$A_2^{(3)} z_1$	$A_2^{(4)}$	$A_2^{(4)} z_2$	$A_2^{(4)} z_3$	$A_2^{(4)} z_1$	4
	A_3	$A_3 z_3$	$A_3 z_1$	$A_3 z_2$	$A_3^{(1)}$	$A_3^{(1)} z_3$	$A_3^{(1)} z_1$	$A_3^{(1)} z_2$	$A_3^{(2)}$	$A_3^{(2)} z_3$	$A_3^{(2)} z_1$	$A_3^{(2)} z_2$	$A_3^{(3)}$	$A_3^{(3)} z_3$	$A_3^{(3)} z_1$	$A_3^{(3)} z_2$	$A_3^{(4)}$	$A_3^{(4)} z_3$	$A_3^{(4)} z_1$	$A_3^{(4)} z_2$	5
					102′	B_0		117′		B_0				B_0				B_0			6
					118′	B_1		133′		$B_1\ y_1$				$B_1\ y_2$				$B_1\ y_3$			7
					134′	B_2		149′		$B_2\ y_2$				$B_2\ y_3$				$B_2\ y_1$			8
					150′	B_3		165′		$B_3\ y_3$				$B_3\ y_1$				$B_3\ y_2$			9
					166′	B_4		181′		$B_4\ x_1$				$B_4\ x_2$				$B_4\ x_3$			10
					182′	B_5		197′		$B_5\ x_1\ y_1$				$B_5\ x_2\ y_2$				$B_5\ x_3\ y_3$			11
					198′	B_6		213′		$B_6\ x_1\ y_2$				$B_6\ x_2\ y_3$				$B_6\ x_3\ y_1$			12
					214′	B_7		229′		$B_7\ x_1\ y_3$				$B_7\ x_2\ y_1$				$B_7\ x_3\ y_2$			13
					230′	B_8		245′		$B_8\ x_2$				$B_8\ x_3$				$B_8\ x_1$			14
					246′	B_9		261′		$B_9\ x_2\ y_1$				$B_9\ x_3\ y_2$				$B_9\ x_1\ y_3$			15
					262′	B_{10}		277′		$B_{10}\ x_2\ y_2$				$B_{10}\ x_3\ y_3$				$B_{10}\ x_1\ y_1$			16
					278′	B_{11}		293′		$B_{11}\ x_2\ y_3$				$B_{11}\ x_3\ y_1$				$B_{11}\ x_1\ y_2$			17
					294′	B_{12}		309′		$B_{12}\ x_3$				$B_{12}\ x_1$				$B_{12}\ x_2$			18
					310′	B_{13}		325′		$B_{13}\ x_3\ y_1$				$B_{13}\ x_1\ y_2$				$B_{13}\ x_2\ y_3$			19
					326′	B_{14}		341′		$B_{14}\ x_3\ y_2$				$B_{14}\ x_1\ y_3$				$B_{14}\ x_2\ y_1$			20
					342′	B_{15}		357′		$B_{15}\ x_3\ y_3$				$B_{15}\ x_1\ y_1$				$B_{15}\ x_2\ y_2$			21.

Es bedeutet hierbei

x_1 diejenige Substitution, die $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p$ in $e\,f\,g\,h\,a\,b\,c\,d\,m\,n\,o\,p\,i\,j\,k\,l$ überführt,

x_2 diejenige Substitution, die $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p$ in $i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p\,a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$ überführt,

x_3 diejenige Substitution, die $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p$ in $m\,n\,o\,p\,i\,j\,k\,l\,e\,f\,g\,h\,a\,b\,c\,d$ überführt,

y_1 diejenige Substitution, die $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p$ in $b\,a\,d\,c\,f\,e\,h\,g\,j\,i\,l\,k\,n\,m\,p\,o$ überführt,

y_2 diejenige Substitution, die $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p$ in $c\,d\,a\,b\,g\,h\,e\,f\,k\,l\,i\,j\,o\,p\,m\,n$ überführt,

y_3 diejenige Substitution, die $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p$ in $d\,c\,b\,a\,h\,g\,f\,e\,l\,k\,j\,i\,p\,o\,n\,m$ überführt, und es ist

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = 1;$$

$$x_1\,x_2 = x_2\,x_1 = x_3,\; x_2\,x_3 = x_3\,x_2 = x_1,\; x_3\,x_1 = x_1\,x_3 = x_2;$$

$$y_1\,y_2 = y_2\,y_1 = y_3,\; y_2\,y_3 = y_3\,y_2 = y_1,\; y_3\,y_1 = y_1\,y_3 = y_2.$$

11. Wir zeigen zuerst, dass dieses Modell dem Axiom „*durch zwei verschiedene Punkte geht eine und nur eine Gerade*“ genügt. Erstens ist es klar, dass den Punktpaaren

$$\{\mu, \nu\},$$

wobei $\mu < \nu$ und entweder

1) $\mu = 1 \ldots 21, \nu = 2 \ldots 85$ oder
2) $\mu, \nu = 22 \ldots 37$ oder
3) $\mu, \nu = 38 \ldots 53$ oder
4) $\mu, \nu = 54 \ldots 69$ oder
5) $\mu, \nu = 70 \ldots 85$ ist,

eine und nur eine Gerade entspricht.

Es bleiben diejenigen Punktpaare übrig, deren Punkte zu zwei verschiedenen der vier Punktgruppen

$$\{22 \ldots 37\},\; \{38 \ldots 53\},\; \{54 \ldots 69\},\; \{70 \ldots 85\}$$

gehören. Dass auch diesen Punktpaaren eine und nur eine Gerade entspricht, folgt daraus, dass eine und nur eine der 16 Substitutionen für die Elemente einer geordneten Menge von 16 Elementen

$$1, y_1, y_2, y_3, x_1, x_1 y_1, x_1 y_2, x_1 y_3, x_2, x_2 y_1, x_2 y_2, x_2 y_3, \\ x_3, x_3 y_1, x_3 y_2, x_3 y_3$$

das μ-te Element der Menge in das ν-te überführt ($\mu, \nu = 1 \dots 16$), und aus den für $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ geltenden Gleichungen.

12. Um das Zutreffen der übrigen Axiome nachzuweisen, haben wir erst die Ebenen zu erklären. Wir bezeichnen sie mit $1'', 2'', 3'', \dots$, und weisen erstens der Ebene

$1''$	die Punkte	1—21	und die Geraden	$1'$—$21'$
$2''$	„ „	1—5, 22—37	„ „ „	$1'$, $22'$—$41'$
$3''$	„ „	1—5, 38—53	„ „ „	$1'$, $42'$—$61'$,
$4''$	„ „	1—5, 54—69	„ „ „	$1'$, $62'$—$81'$,
$5''$	„ „	1—5, 70—85	„ „ „	$1'$, $82'$—$101'$,

zu.

Bevor wir die übrigen Ebenen erklären, wollen wir die folgende Betrachtung anstellen.

13. Die ausser den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 in der Ebene λ'' ($\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$) gelegenen Punkte gehen aus dem Ausdruck

$$(\alpha) \qquad 5 + 16(\lambda - 1) + 4\mu + \nu$$

für $\mu = 0 \dots 3$, $\nu = 1 \dots 4$ hervor. Von diesen Punkten liegen in einer Geraden

1) *mit 1* vier solche Punkte, die aus (α) für ein festes μ ($\mu = 0 \dots 3$) für $\nu = 1, 2, 3, 4$ hervorgehen,

2) *mit 2* vier solche Punkte, die aus (α) für ein festes ν für $\mu = 0 \dots 3$ hervorgehen,

3) *mit 3* vier Punkte von der Form ($\nu = 1 \dots 4$)

$$
\begin{aligned}
&5 + 16(\lambda - 1) + \qquad \nu, \\
&\cdots\cdots\cdots + \ 4 + \nu z_1, \\
&\cdots\cdots\cdots + \ 8 + \nu z_2, \\
&\cdots\cdots\cdots + 12 + \nu z_3,
\end{aligned}
$$

4) *mit 4* vier Punkte von der Form ($\nu = 1 \dots 4$)

$$
\begin{aligned}
&5 + 16(\lambda - 1) + \qquad \nu, \\
&\cdots\cdots\cdots + \ 4 + \nu z_2, \\
&\cdots\cdots\cdots + \ 8 + \nu z_3, \\
&\cdots\cdots\cdots + 12 + \nu z_1,
\end{aligned}
$$

5) *mit 5* vier Punkte von der Form ($\nu = 1 \dots 4$)

$$
\begin{aligned}
&5 + 16(\lambda - 1) + \qquad \nu, \\
&\cdots\cdots\cdots + \ 4 + \nu z_3, \\
&\cdots\cdots\cdots + \ 8 + \nu z_1, \\
&\cdots\cdots\cdots + 12 + \nu z_2.
\end{aligned}
$$

Es bedeutet hier und im Folgenden νz_ϱ ($\varrho = 1, 2, 3$) die Ordnungsnummer, die das ν-te Element ($\nu = 1, 2, 3, 4$ oder $0, 1, 2, 3$) einer geordneten Menge aus vier Elementen nach der Substitution z_ϱ erhält.

14. *Wir projizieren nun von den Punkten 6—21 der Ebene 1″ aus die Geraden der Ebene 2″ auf die Ebene 3″.* Es gehen dabei die den Geraden der Ebene 2″ angehörenden, oben in 1)—5) vorkommenden Punktausdrücke für $\lambda = 2$ in ebensolche mit $\lambda = 3$ über nach den folgenden Schemata, in denen wir allerdings *nur die zwei letzten oder nur das letzte Glied der betreffenden Ausdrücke angeben.*

1) *Projektionen der durch 1 gehenden Geraden.* Zu solchen Geraden gehören Punktgruppen der Form

$$5 + 16(\lambda - 1) + 4\mu + 1, \dots 4\mu + 2, \dots 4\mu + 3, \dots 4\mu + 4,$$

d. h. z. B. in der Ebene 1″ die Punktgruppen

$$\{6, 7, 8, 9\},\ \{10, 11, 12, 13\},\ \{14, 15, 16, 17\},\ \{18, 19, 20, 21\},$$

in der Ebene 2″ diejenigen, deren Nummer man aus diesen mittels Addition von 16 erhält. Wir geben nun die Projektionen dieser Punktgruppen in der folgenden Tabelle:

Projektionszentrum	6, 7, 8, 9	10, 11, 12, 13	14, 15, 16, 17	18, 19, 20, 11
In einer Geraden mit 1 liegende Punktgruppe in 2″	$4\mu+1,\ 4\mu+2,\ 4\mu+3,\ 4\mu+4$			
Punkte in 3″	$4\mu+1$	$4(\mu z_1)+1$	$4(\mu z_2)+1$	$4(\mu z_3)+1$
	$4\mu+2$	$4(\mu z_1)+2$	$4(\mu z_2)+2$	$4(\mu z_3)+2$
	$4\mu+3$	$4(\mu z_1)+3$	$4(\mu z_2)+3$	$4(\mu z_3)+3$
	$4\mu+4$	$4(\mu z_1)+4$	$4(\mu z_2)+4$	$4(\mu z_3)+4$

Diese Tabelle, wie auch die folgenden, erhält man ohne weiteres mit Hilfe des Modells auf S. 11 unter Beachtung der Bedeutung von $x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3)$.

2) *Projektionen der durch 2 gehenden Geraden.* Das Schema sieht hier so aus:

Projektionszentrum	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
In einer Geraden mit 2 liegende Punktgruppe in 2″.	$\nu,\ 4+\nu,\ 8+\nu,\ 12+\nu$															
Punkte in 3″	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3
	$4+\nu$	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3
	$8+\nu$	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3
	$12+\nu$	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3	ν	νz_1	νz_2	νz_3

Wir notieren auch hier die in der Ebene 1″ befindlichen, mit 2 in einer Geraden liegenden Punktgruppen

$$\{6, 10, 14, 18\},\ \{7, 11, 15, 19\},\ \{8, 12, 16, 20\},\ \{9, 13, 17, 21\}.$$

3) *Projektionen der durch 3 gehenden Geraden.* Um Raum zu sparen, schreiben wir hier das Schema etwas anders als oben:

In einer Geraden mit 3 liegende Punktgruppe in 2″: $\nu,\ \nu z_1,\ \nu z_2,\ \nu z_3$.

Projektions-zentrum	6	7	8	9	10	11	12	13
	ν	νz_1	νz_2	νz_3	$\nu z_1 = \nu z_1$	$\nu z_1 z_1 = \nu$	$\nu z_1 z_2 = \nu z_3$	$\nu z_1 z_3 = \nu z_2$
Punkte in 3″	νz_1	$(\nu z_1) z_1$	$(\nu z_2) z_1$	$(\nu z_3) z_1$	$\nu = (\nu z_1) z_1$	$\nu z_1 = \nu z_1$	$\nu z_2 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_3 = (\nu z_2) z_1$
	νz_2	$(\nu z_1) z_2$	$(\nu z_2) z_2$	$(\nu z_3) z_2$	$\nu z_3 = (\nu z_1) z_2$	$\nu z_3 z_1 = \nu z_2$	$\nu z_3 z_2 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_3 z_3 = (\nu z_2) z_2$
	νz_3	$(\nu z_1) z_3$	$(\nu z_2) z_3$	$(\nu z_3) z_3$	$\nu z_2 = (\nu z_1) z_3$	$\nu z_2 z_1 = \nu z_3$	$\nu z_2 z_2 = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_2 z_3 = (\nu z_2) z_3$

14	15	16	17	18	19	20	21
$\nu z_2 = \nu z_2$	$\nu z_2 z_1 = \nu z_3$	$\nu z_2 z_2 = \nu$	$\nu z_2 z_3 = \nu z_1$	$\nu z_3 = \nu z_3$	$\nu z_3 z_1 = \nu z_2$	$\nu z_3 z_2 = \nu z_1$	$\nu z_3 z_3 = \nu$
$\nu z_3 = (\nu z_2) z_1$	$\nu z_3 z_1 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_3 z_2 = \nu z_1$	$\nu z_3 z_3 = (\nu z_1) z_1$	$\nu z_2 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_2 z_1 = (\nu z_2) z_1$	$\nu z_2 z_2 = (\nu z_1) z_1$	$\nu z_2 z_3 = \nu z_1$
$\nu = (\nu z_2) z_2$	$\nu z_1 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_2 = \nu z_2$	$\nu z_3 = (\nu z_1) z_2$	$\nu z_1 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_1 z_1 = (\nu z_2) z_2$	$\nu z_1 z_2 = (\nu z_1) z_2$	$\nu z_1 z_3 = \nu z_2$
$\nu z_1 = (\nu z_2) z_3$	$\nu z_1 z_1 = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_1 z_2 = \nu z_3$	$\nu z_1 z_3 = (\nu z_1) z_3$	$\nu = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_1 = (\nu z_2) z_3$	$\nu z_2 = (\nu z_1) z_3$	$\nu z_3 = \nu z_3$

Die in einer Geraden mit 3 liegenden Punktgruppen der Ebene 1″ sind hier:

$$\{6, 11, 16, 21\}, \{7, 10, 17, 20\}, \{8, 13, 14, 19\}, \{9, 12, 15, 18\}.$$

4) *Projektionen der durch 4 gehenden Geraden.*

In einer Geraden mit 4 liegende Punktgruppen in 2″: ν, νz_2, νz_3, νz_1.

Projektions-zentrum	6	7	8	9	10	11	12	13
	ν	νz_1	νz_2	νz_3	$\nu z_2 = \nu z_2$	$\nu z_2 z_1 = \nu z_3$	$\nu z_2 z_2 = \nu$	$\nu z_2 z_3 = \nu z_1$
Punkte in 3′	νz_2	$\nu z_1 z_2$	$\nu z_2 z_2$	$\nu z_3 z_2$	$\nu = (\nu z_2) z_2$	$\nu z_1 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_2 = \nu z_2$	$\nu z_3 = (\nu z_1) z_2$
	νz_3	$\nu z_1 z_3$	$\nu z_2 z_3$	$\nu z_3 z_3$	$\nu z_1 = (\nu z_2) z_3$	$\nu z_1 z_1 = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_1 z_2 = \nu z_3$	$\nu z_1 z_3 = (\nu z_1) z_3$
	νz_1	$\nu z_1 z_1$	$\nu z_2 z_1$	$\nu z_3 z_1$	$\nu z_3 = (\nu z_2) z_1$	$\nu z_3 z_1 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_3 z_2 = \nu z_1$	$\nu z_3 z_3 = (\nu z_1) z_1$

14	15	16	17	18	19	20	21
$\nu z_3 = (\nu z_3)$	$\nu z_3 z_1 = \nu z_2$	$\nu z_3 z_2 = \nu z_1$	$\nu z_3 z_3 = \nu$	$\nu z_1 = \nu z_1$	$\nu z_1 z_1 = \nu$	$\nu z_1 z_2 = \nu z_3$	$\nu z_1 z_3 = \nu z_2$
$\nu z_1 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_1 z_1 = (\nu z_2) z_2$	$\nu z_1 z_2 = (\nu z_1) z_2$	$\nu z_1 z_3 = \nu z_2$	$\nu z_3 = (\nu z_1) z_2$	$\nu z_3 z_1 = \nu z_2$	$\nu z_3 z_2 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_3 z_3 = (\nu z_2) z_2$
$\nu = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_1 = (\nu z_2) z_3$	$\nu z_2 = (\nu z_1) z_3$	$\nu z_3 = \nu z_3$	$\nu z_2 = (\nu z_1) z_3$	$\nu z_2 z_1 = \nu z_3$	$\nu z_2 z_2 = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_2 z_3 = (\nu z_2) z_3$
$\nu z_2 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_2 z_1 = (\nu z_2) z_1$	$\nu z_2 z_2 = (\nu z_1) z_1$	$\nu z_2 z_3 = \nu z_1$	$\nu = (\nu z_1) z_1$	$\nu z_1 = \nu z_1$	$\nu z_2 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_3 = (\nu z_2) z_1$

Die in einer Geraden mit 4 liegenden Punktgruppen der Ebene 1″ sind:

$$\{6, 12, 17, 19\}, \{7, 13, 16, 18\}, \{8, 10, 15, 21\}, \{9, 11, 14, 20\}.$$

5) *Projektionen der durch 5 gehenden Geraden.*

In einer Geraden mit 5 liegende Punktgruppe in 2″: ν, νz_3, νz_1, νz_2.

Projektions-zentrum	6	7	8	9	10	11	12	13
Punkte in 3″	ν	νz_1	νz_2	νz_3	$\nu z_3 = \nu z_3$	$\nu z_3 z_1 = \nu z_2$	$\nu z_3 z_2 = \nu z_1$	$\nu z_3 z_3 = \nu$
	νz_3	$\nu z_1 z_3$	$\nu z_2 z_3$	$\nu z_3 z_3$	$\nu = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_1 = (\nu z_2) z_3$	$\nu z_2 = (\nu z_1) z_3$	$\nu z_3 = \nu z_3$
	νz_1	$\nu z_1 z_1$	$\nu z_2 z_1$	$\nu z_3 z_1$	$\nu z_2 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_2 z_1 = (\nu z_2) z_1$	$\nu z_2 z_2 = (\nu z_1) z_1$	$\nu z_2 z_3 = \nu z_1$
	νz_2	$\nu z_1 z_2$	$\nu z_2 z_2$	$\nu z_3 z_2$	$\nu z_1 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_1 z_1 = (\nu z_2) z_2$	$\nu z_1 z_2 = (\nu z_1) z_2$	$\nu z_1 z_3 = \nu z_2$

14	15	16	17	18	19	20	21
$\nu z_1 = \nu z_1$	$\nu z_1 z_1 = \nu$	$\nu z_1 z_2 = \nu z_3$	$\nu z_1 z_3 = \nu z_2$	$\nu z_2 = \nu z_2$	$\nu z_2 z_1 = \nu z_3$	$\nu z_2 z_2 = \nu$	$\nu z_2 z_3 = \nu z_1$
$\nu z_2 = (\nu z_1) z_3$	$\nu z_2 z_1 = \nu z_3$	$\nu z_2 z_2 = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_2 z_3 = (\nu z_2) z_3$	$\nu z_1 = (\nu z_2) z_3$	$\nu z_1 z_1 = (\nu z_3) z_3$	$\nu z_1 z_2 = \nu z_3$	$\nu z_1 z_3 = (\nu z_1) z_3$
$\nu = (\nu z_1) z_1$	$\nu z_1 = \nu z_1$	$\nu z_2 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_3 = (\nu z_2) z_1$	$\nu z_3 = (\nu z_2) z_1$	$\nu z_3 z_1 = (\nu z_3) z_1$	$\nu z_3 z_2 = \nu z_1$	$\nu z_3 z_3 = (\nu z_1) z_1$
$\nu z_3 = (\nu z_1) z_2$	$\nu z_3 z_1 = \nu z_2$	$\nu z_3 z_2 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_3 z_3 = (\nu z_2) z_2$	$\nu = (\nu z_2) z_2$	$\nu z_1 = (\nu z_3) z_2$	$\nu z_2 = \nu z_2$	$\nu z_3 = (\nu z_1) z_2$

Die in einer Geraden mit 5 liegenden Punktgruppen der Ebene 1″ sind:

$$\{6, 13, 15, 20\}, \{7, 12, 14, 21\}, \{8, 11, 17, 18\}, \{9, 10, 16, 19\}.$$

15. *Aus diesen Tabellen kann man ablesen, dass,*

1) *wenn man, mit einem Punkte der Ebene 1″ als Projektionszentrum, eine durch $\varkappa$ ($\varkappa = 1 \ldots 5$) gehende Gerade der Ebene 2″ auf die Ebene 3″ projiziert, stets eine durch $\varkappa$ gehende Gerade entsteht, und dass,*

2) *wenn man, mit zwei verschiedenen mit dem Punkte $\varkappa$ ($\varkappa = 1 \ldots 5$) in einer Geraden liegenden Punkten der Ebene 1″ als Projektionszentra, eine durch $\varkappa$ gehende Gerade der Ebene 2″ auf die Ebene 3″ projiziert, stets die beiden Projektionen zusammenfallen.*

Dasselbe kann mittels ähnlicher Tabellen wie oben für *die Projektionen in den Ebenen 4″ und 5″* gezeigt werden.

Man sieht nun ein, dass einem jeden der 80 Geradenpaare

$$\{\mu' \nu'\} \left| \begin{array}{l} (\mu = 2 \ldots 5, \ \nu = 22 \ldots 25); \\ (\mu = 6 \ldots 9, \ \nu = 26 \ldots 29); \\ (\mu = 10 \ldots 13, \ \nu = 30 \ldots 33); \\ (\mu = 14 \ldots 17, \ \nu = 34 \ldots 37); \\ (\mu = 18 \ldots 21, \ \nu = 38 \ldots 41) \end{array} \right.$$

genau eine Menge von fünf 21 Punkte enthaltenden Geraden entspricht, welche durch einen Punkt der Geraden 1′ gehen. *Diese 80 Geraden- bzw. Punktmengen erklären wir als die Ebenen 6″ … 85″.*

Es ist hiernach leicht zu zeigen, dass *die Axiome I 3 — I 8 erfüllt werden.*

Man sieht schiesslich fast ohne weiteres ein, dass *das elliptische Parallelenaxiom gilt.*

16. Wenn man in dem räumlichen Fünfpunktmodell, das wir eben konstruiert haben, auf jeder Geraden „*zwischen*“ in der von VEBLEN (loc. cit. p. 3) angegebenen Weise interpretiert, entsteht das auf der S. 4 beabsichtigte, den Axiomen I, II 1 — II 3, IV genügende endliche Modell.

Dass das Axiom von PASCH nicht erfüllt sein kann, folgt daraus, dass dieses Axiom in Vereinigung mit I, II 1 — II 3 die Existenz unendlich vieler Punkte impliziert.

Ein den obenerwähnten Axiomen I, II 1 — II 3, IV, nicht aber dem elliptischen Parallelenaxiom, genügendes Modell erhält man aus dem räumlichen Sechspunktmodell durch Streichen einer Ebene samt ihren Punkten und Geraden. Dieses Modell besteht aus 125 Punkten, 775 Geraden und 155 Ebenen.

SUR LES VALEURS ASYMPTOTIQUES DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

PAR

FELIX IVERSEN

HELSINKI 1929
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

HELSINKI 1929
Imprimerie de la société p. a. SANA

Sur les valeurs asymptotiques des fonctions périodiques

1. Soit $w = f(z)$ une fonction périodique méromorphe, Π l'une de ses bandes de périodicité s'étendant à l'infini en deux directions. Si $f(z)$ tend vers une valeur-limite déterminée ω sur le contour de Π lorsque z s'éloigne indéfiniment dans l'une des directions infinies de ce domaine, la fonction $f(z)$ ou bien tend uniformément vers ω aussi à l'intérieur de Π dans cette même direction infinie, ou bien prend dans ce même voisinage du point à l'infini chaque valeur donnée en une infinité de points sauf deux valeurs au plus. Ceci s'ensuit immédiatement de quelques théorèmes généraux concernant le domaine d'indétermination des fonctions méromorphes relatif aux domaines infinis et leurs contours[1]).

2. Supposons que $f(z)$ tende uniformément vers ω à l'intérieur et sur le contour de Π dans l'une de ses directions infinies. Alors on peut imaginer *a priori* deux cas possibles: ou bien $f(z)$ prend la valeur ω en une infinité de points s'éloignant à l'infini à l'intérieur ou sur le contour de Π dans la direction considérée, ou bien $f(z)$ ne prend dans cette même partie de Π la valeur ω qu'en un nombre fini de points.

3. Nous allons voir que le premier cas est en effet impossible. Faisons l'antithèse qu'il existe une suite infinie de racines z_i

---

1) *Cf.* par exemple notre Thèse: *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, (Helsingfors 1914) p. 29, où ils sont déduits partant des théorèmes classiques de M. Ernst Lindelöf: *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta Soc. Sc. Fennicae, Tome XXXV, 1908.

($i = 1, 2, \cdots$) de l'équation $f(z) = \omega$ dans la partie de II où $f(z)$ tend uniformément vers ω. Prolongeons les éléments de la fonction $z = \varphi(w)$, inverse de $w = f(z)$, qui correspondent aux racines z_i, le long d'un chemin g dans le plan des w, partant de ω et aboutissant en un point w_0, en contournant les points critiques algébriques par des arcs suffisamment petits et en changeant, lorsqu'il est nécessaire pour que $z\ (= \varphi(w))$ appartienne toujours à II, une branche de $\varphi(w)$ en une autre branche équivalente en vertu de la périodicité de $f(z)$. Les courbes γ_i du plan des z, correspondant à g en vertu des branches considérées de $z = \varphi(w)$ et différentes entre elles, tendent, toujours en restant à l'intérieur de II, soit vers l'infini — naturellement dans la direction de II opposée à celle où $f(z) \to \omega$ — s'il y a sur g un point transcendant de $\varphi(w)$, soit vers des racines z_i^0 à distance finie de l'équation $f(z) = w_0$, appartenant à II mais s'éloignant vers l'infini comme seul point-limite possible, de même dans la direction opposée à celle où $f(z) \to \omega$. Notre antithèse nous a donc conduit à la conclusion qu'il existe dans II une infinité de chemins différents γ_i joignant les points z_i qui tendent à l'infini dans l'une des directions de II aux points z_i^0 s'éloignant indéfiniment (ou au point à l'infini) dans la direction opposée de II. Il s'ensuivrait nécessairement qu'il y aurait, à l'intérieur ou sur le contour de II, un point à distance finie dont le voisinage, quelque petit qu'il soit, soit traversé par une infinité de segments de courbes γ_i différentes correspondant au même chemin g. Cette conclusion contredit cependant les propriétés d'une fonction méromorphe dans l'entourage d'un point à distance finie, et notre assertion au commencement de ce numéro est donc démontrée.

4. Nous avons ainsi trouvé que

si $f(z)$ tend uniformément vers une limite déterminée ω dans l'une des directions infinies de II, il n'y a, dans cette même partie de II et à l'extérieur d'un cercle suffisamment grand, aucune racine de l'équation $f(z) = \omega$.

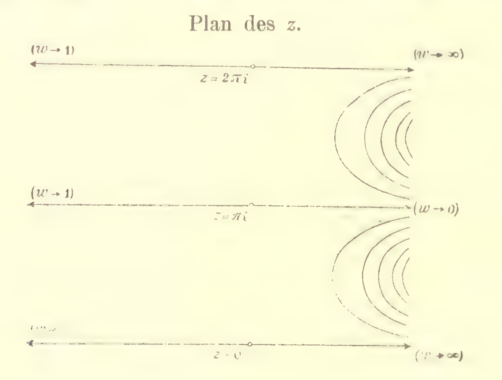
Considéré comme point transcendant pour la portion de la

fonction inverse $\varphi(w)$ correspondant à l'ensemble des parties en question de toutes les bandes Π, le point ω est *directement critique* [1]).

Dans le cas actuel il peut bien se faire que la fonction $f(z)$ prenne la valeur ω en une infinité de points de Π, mais ces points tendent alors vers l'infini dans la direction opposée à celle où $f(z) \rightarrow \omega$.

5. Un exemple aussi net que facile nous donne la fonction entière $w = f(z) = e^{e^z}$, qui admet comme bande de période Π une bande parallèle à l'axe réel et de la hauteur 2π. Cette fonction admet comme valeurs exceptionnelles 0 et ∞, qu'elle ne prend en aucun point. Pour Π nous pouvons choisir la bande de la hauteur 2π, comprise entre l'axe réel et sa parallèle par le point $z = 2\pi i$.

Plan des z.



Dans le demiplan gauche $f(z)$ tend uniformément vers 1. Sur les segments infinis droits du contour de Π $f(z)$ tend vers ∞ sans converger uniformément vers cette limite à l'intérieur de Π. En fait $f(z)$ tend vers zéro sur le rayon issu du point $z = \pi i$ parallèlement à l'axe réel positif, et prend par suite entre ledit rayon et l'axe réel, ainsi qu'entre ce même rayon et sa parallèle issue du point $z = 2\pi i$, chaque valeur différente de 0 et ∞ en une infinité de points tendant vers l'infini dans la direction droite de Π. Séparément $f(z)$ prend la valeur 1 dans la suite infinie de points $z = \log 2n\pi + i\left(\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)$, $[n = 1, 2, 3, \cdots]$.

[1]) *Cf.* notre Thèse, p. 40.

La figure schématique nous fait voir les lignes dans Π sur lesquelles $f(z)$ est réelle et positive et qui divisent Π en domaines simplement connexes correspondant aux feuillets particuliers de la surface de Riemann de la fonction inverse $\varphi(w)$, munis tous d'une coupure joignant les points 0 et ∞ suivant l'axe réel positif. Les deux domaines marqués dans la figure représentent des domaines de types différents. Pour les branches de $\varphi(w)$ correspondant à l'ensemble des domaines qui s'étendent à l'infini aussi à gauche, le point $w = -1$ est point transcendant directement critique; toutes les autres branches de $\varphi(w)$ y sont holomorphes.

6. Dans tout ce qui précède nous avons supposé que $f(z)$ tende uniformément vers ω dans l'une des directions infinies de Π. Il est évident, comme nous l'avons signalé au n^0 1, que, dans des cas très fréquents, $f(z)$ ne tend pas uniformément vers ω à l'intérieur de Π quoiqu'elle converge vers cette valeur sur son contour. En fait la fonction e^{e^z} nous apprend que ceci se présente relativement à la direction droite de sa bande de période, et la fonction $e^{e^z} + e^{e^{-z}}$ jouit de la même propriété dans toutes les deux directions de Π.

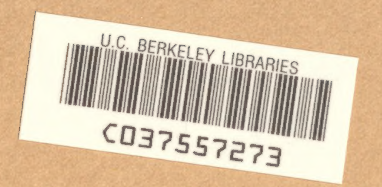
Ajoutons encore, bien que ceci soit évident, que dans des cas assez étendus $f(z)$ n'a aucune valeur asymptotique dans Π ou sur son contour. L'exemple le plus simple nous est fourni par les fonctions méromorphes doublement périodiques considérées ici comme classe spéciale de fonctions simplement périodiques.

7. Dans le cas enfin, où il y a trois valeurs au moins que $f(z)$ ne prend que dans un nombre fini de points à l'intérieur et sur le contour de Π, on sait, que $f(z)$ prend dans Π et sur l'un de ses contours toute valeur exactement le même nombre n de fois, sauf une valeur ω_1 au moins et deux valeurs ω_1 et ω_2 au plus, qu'elle prend en moins de n points à distance finie et vers lesquelles $f(z)$ tend uniformément resp. dans l'une et l'autre des directions infinies de Π. On trouve en fait, supposant la période égale à $2\pi i$ (ce qui n'implique aucune restriction) que $f(z)$ peut

s'écrire dans la forme $f(e^z) = \bar{f}(t)$, $\bar{f}$ étant une fonction méromorphe pour toute valeur t, sauf peut-être 0 et ∞, fonction qui se réduit dans le cas actuel, en vertu de l'hypothèse faite au commencement de ce numéro, à une fonction rationnelle. Les valeurs ω_1 et ω_2 indiquées plus haut coïncident avec les valeurs de cette fonction rationnelle $\bar{f}(t)$ pour $t = 0$ et $t = \infty$.

8. Dans le cas où $f(z)$ tend uniformément vers ω dans Π dans l'une de ses directions infinies on conclut que $f(z)$ converge uniformément vers ω en tout angle appartenant entièrement à un demi-plan qui est limité par une droite parallèle au vecteur-période de $f(z)$ et qui comprend la direction en question de Π. Inversement le raisonnement précédent ne permet pas de conclure, dans *le cas général*, que si $f(z) \to \omega$ sur un chemin traversant une infinité de domaines Π, il y ait, aussi à l'intérieur d'un seul domaine Π, un chemin sur lequel $f(z) \to \omega$.

Index.


U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037557273

